Die geometrische Formenlehre

in Verbindung mit

dem

geometrischen Zeichnen,

zum Gebrauch an Gymnasien und Realschulen,

sowie zum Selbstunterricht

bearbeitet

von

Präceptor C. W. Scharpf,

Lehrer der Mathematik am mittlern und untern Gymnasium in Ulm.

Mit einem Anhange:
kurze Sätze zur Wiederholung enthaltend,

nebst 18 Figurentafeln.

Dritte verbesserte Auflage.

Ulm, 1852.

Verlag der Wohler'schen Buchhandlung.
(F. Lindemann.)

Den

hochverehrten Herren

Dr. G. H. Moser,

Kreisschulinspektor und Rektor des Gymnasiums in Ulm

und

Dr. Chr. Nagel,

Rektor der Real-Anstalt daselbst

zum Zeichen innigster Hochachtung

gewidmet

von

dem Verfasser.

Vorwort

des Herrn

Rektor Dr. Nagel.

Mein Freund und ehemaliger Schüler, der Verfasser der folgenden Schrift wünscht, daß ich derselben einige empfehlende Worte vorausschicke. Ich thue dieß gerne, wenn ich gleich dieselben für überflüssig halte, da ich überzeugt bin, daß die folgende Schrift sowohl wegen ihres Stoffes als wegen ihrer Form sich von selbst Bahn brechen wird.

Man hat ziemlich allgemein den Vortheil erkannt, der dem eigentlichen geometrischen Unterrichte dadurch erwächst, daß ihm ein geometrischer Anschauungsunterricht und eine geometrische Formenlehre vorangeht, damit der Schüler richtig sehen und zugleich die ersten Schwierigkeiten im Gebrauche des Zirkels und Lineals überwinden lerne, bevor er sich in das System der Wissenschaft hineinarbeite. Wo es daher die Zeit erlaubt, ist der geometrische Unterricht in der genannten Richtung ausgedehnt worden. Je magerer nun aber bis jetzt die Literatur ist in Beziehung auf Schriften,

welche den in der genannten Vorschule der Geometrie zu verweisenden Stoff bearbeiten, um so willkommener, meine ich, müsse jede neue Erscheinung in diesem Gebiete der Schulwissenschaften aufgenommen werden.

Ich glaube aber eben so, daß sich die folgende Schrift auch wegen ihrer Form empfehlen wird. Denn bei aller Reichhaltigkeit und Abwechslung des Stoffes, so wie bei der möglichsten Vielseitigkeit in der Betrachtung desselben scheint sie mir doch mehr als einige andere mir bekannte ähnliche Schriften eine Klippe zu vermeiden, an welcher der weniger gewandte Lehrer so gerne scheitert. Ich meine hier das Uebergreifen in die eigentliche Geometrie, wodurch dem Schüler Construktionen von Figuren mechanisch eingeprägt werden, welche der unmittelbaren Anschauung der Wahrheit allzu ferne stehen und daher dem Schüler erst dann gegeben werden sollten, wenn sie auf wissenschaftlichem Wege bewiesen werden können.

Ulm, den 24. Januar 1848.

Vorrede zur ersten Auflage.

Der Verfasser hält es für überflüssig, sich hier über die Wichtigkeit der Geometrie überhaupt und insbesondere der geometrischen Formenlehre als eines Unterrichtsfaches näher auszusprechen, er hält es für angemessener, über die Entstehung und den Inhalt dieses Buches Einiges anzuführen.

Der geometrische Unterricht am hiesigen Gymnasium fing früher im Ober-Gymnasium an, und deßhalb mußte der Lehrer der Mathematik an diesen Klassen nicht wenige der ihm ohnehin nicht im Uebermaße zugetheilten mathematischen Stunden dazu verwenden, seinen Schülern die ersten Elemente der Geometrie beizubringen und sie mit Führung des Lineals und Zirkels vertraut zu machen. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, beginnt nun in Folge der neuen Organisation des Gymnasiums die geometrische Formenlehre und das geometrische Zeichnen in der obern Klasse des mittlern Gymnasiums.

Da aber die Formenlehre fast in allen geometrischen Lehrbüchern nur in der Einleitung und ganz kurz abgehandelt

ist und meistens bloß in wenigen Begriffserklärungen besteht, und da in den wenigen Büchern, in welchen die Formenlehre ausführlicher abgehandelt wird, das geometrische Zeichnen ganz unberücksichtigt ist, so war es mir, dem dieser Unterricht übertragen wurde, meine erste und wichtigste Aufgabe, einen eigenen Gang für diesen Unterricht auszuarbeiten. Ich legte denselben der Königlichen höchsten Studienbehörde zur Einsicht vor, welche in ihrem Erlaß darüber sagte, „daß sie von dieser mit vielem Fleiß und Sachkenntniß ausgearbeiteten Formenlehre Einsicht genommen und dieselbe ganz geeignet gefunden habe, die Schüler sowohl für den eigentlichen Unterricht in der Geometrie vorzubereiten und sie im Gebrauch von Zirkel und Lineal tüchtig zu üben, als auch ihren Geschmack für Entwerfung zusammengesetzter geometrischer Figuren zu bilden."

Dieses günstige Urtheil, sowie die ehrende Aufmunterung mehrerer Sachverständiger, besonders die meines hochverehrten Herrn Vorstandes, des Kreis-Schulinspektors und Rektors des Gymnasiums Dr. Moser dahier, ermuthigten mich, meine Arbeit der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Unter den Büchern, welche ich zu meiner eigenen Belehrung zu Rathe gezogen habe, verdienen besonders einer rühmlichen Erwähnung: „Unterricht in der Größen-, Formen und räumlichen Verbindungslehre von Seminardirektor Dr. Diesterweg," aus welchem vortrefflichen Buche ich mir sogar erlaubte Einiges wörtlich in meine Arbeit aufzunehmen, weil ich es nicht so gut zu geben vermochte, und dann „die Geometrie des Bürger und Landmanns von Oberlehrer A. Stubba," von

welchem empfehlenswerthen Werke ich mehrere zweckmäßige Aufgaben entlehnte.

Ebenso halte ich es für meine Pflicht, dem Herrn Dr. Nagel, Rektor der hiesigen Real-Anstalt, sowie dem Herrn Baur, Professor der Mathematik und der Naturwissenschaften am Ober-Gymnasium dahier für die belehrenden Winke meinen aufrichtigen Dank hier öffentlich auszusprechen.

Was den Inhalt des Buches selbst betrifft, so erlaube ich mir in Kürze Folgendes anzuführen:

1. Die Einleitung, welche die Entwicklung der Begriffe „Körper, Flächen, Linien und Punkte" enthält, kann, als für Schüler von vierzehn Jahren berechnet, bei jüngeren Schülern übergangen werden.

2. Manches ist der Vollständigkeit wegen in die Formenlehre aufgenommen, was scheinbar in die eigentliche Geometrie gehört, wenn es nämlich mehr Sache der Anschauung als des abstrakten Beweises ist.

3. Wo möglich geht das Zeichnen Hand in Hand mit dem entsprechenden Texte, so daß, wenn eine Aufgabe vorkommt, zugleich die Anleitung zur Ausführung gegeben wird.

4. Gerne hätte ich im Anfange des Buches eine specielle Anleitung zur Behandlung des Lineals, Zirkels u. s. w. vorausgeschickt, wenn ich nicht befürchtet hätte, den Lehrern einen geringen Dienst damit zu erweisen und das Buch unnöthig zu vergrößern.

5. Den meisten Abschnitten ist eine Anzahl darauf Bezug habender Aufgaben zum Zeichnen beigefügt, welche dem Lehrer, der seine Schüler im geometrischen Zeichnen recht einüben will, eine willkommene Beigabe sein dürften.

6. Die im Anhange enthaltenen Sätze geben in Kürze das Wichtigste des im Buche Vorgekommenen und können den Schülern, welche das Buch selbst nicht haben sollten, diktirt werden.

Möge sich nun der Werth und die Nützlichkeit dieses Buches durch den Gebrauch bewähren und so der Erfolg die Herausgabe desselben rechtfertigen!

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Meine Formenlehre hat die Ehre gehabt, von verschiedenen Recensenten — denen ich für ihre wohlmeinenden und praktischen Vorschläge hiemit meinen Dank ausspreche — beurtheilt zu werden, und zwar von den meisten sehr günstig. Ich habe mich bestrebt, in dieser zweiten Auflage jenen Vorschlägen wo möglich zu entsprechen, und habe darnach Manches abgeändert; leider konnte ich aber nicht immer darauf eingehen, da entweder die Ansichten der verehrten Herren Recensenten sich oft selbst widersprachen, oder manchmal

nicht ausführbar waren, indem sonst das Buch zu sehr vergrößert worden wäre oder eine ganz andere Gestalt erhalten hätte, oder auch weil die Verbesserungsvorschläge nicht immer mit meinen Ansichten übereinstimmten.

Die Veränderungen, welche in dieser neuen Auflage vorkommen, bestehen theils darin, daß ich Einiges, was für die Fassungskraft jüngerer Schüler weniger paßt, geradezu wegließ, theils Manches verbesserte. So wurden z. B. die Einleitung, ebenso das Theilen des rechten Winkels in 5 gleiche Theile und einige damit zusammenhängende Aufgaben ganz weggelassen. Dadurch fielen natürlich auch mehrere Figuren aus, so daß sich die Figurentafeln von 21 auf 18 reducirten.

Daß diese Formenlehre von manchen Seiten her günstig aufgenommen wurde, beweißt dieß, daß sie theilweise in Oesterreich als Schulbuch eingeführt worden ist.

Schließlich muß ich noch die Bereitwilligkeit rühmen, wornach die verehrliche Verlagsbuchhandlung bereit ist, den Ladenpreis nicht unbedeutend zu ermäßigen.

Möge auch diese zweite Auflage dieselbe freundliche Aufnahme und schonende Beurtheilung finden, deren sich die erste zu erfreuen hatte!

Ulm, im Juli 1850.

Der Verfasser.

Vorrede zur dritten Auflage.

Durch die schnelle Verbreitung meiner Formenlehre, besonders in den k. k. österreichischen Staaten, ist eine neue Auflage — die 3te in 3 Jahren — nöthig geworden. Obwohl ich auch dießmal das Buch einer sorgfältigen Durchsicht unterwarf, so fand ich doch nicht für nothwendig, wesentliche Veränderungen vorzunehmen, und so weicht diese neue Auflage nur durch einige Verbesserungen unbedeutend von der vorhergehenden ab.

Ulm, im Oktober 1851.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Der Punkt und die gerade Linie.

Zweiter Abschnitt.

Der Winkel.

Dritter Abschnitt.

Die Figur überhaupt.

Vierter Abschnitt.

Das Dreieck.

Fünfter Abschnitt.

Das Parallelogramm.

Sechster Abschnitt.

Der Kreis.

Erster Abschnitt.

Der Punkt und die gerade Linie.

---

§. 1.

Von dem Punkte und dessen Bezeichnung.

1. Wenn wir mit einem Stabe oder mit dem Finger eine Bewegung in dem freien Raume machen, so kann man die Stelle oder den Ort unterscheiden, wo die Bewegung anfing und wo sie aufhörte. Die Bezeichnung einer solchen Stelle, so wie überhaupt die eines jeden Ortes, nennt man *Punkt*.

2. *Ein Punkt hat*, als die bloße Bezeichnung eines Ortes, *keine Ausdehnung*, also auch keine Größe.

3. Da der Punkt keine Ausdehnung hat, so kann er auch *nicht vergrößert* werden, selbst dann nicht, wenn man zwei oder mehrere Punkte mit einander verbindet; denn da die Größe jedes einzelnen Punktes = 0 ist, so ist auch die Größe mehrerer Punkte = 0.

4. Aus demselben Grunde kann ein Punkt auch nicht getheilt werden, oder der *Punkt ist untheilbar*.

5. Da kein Punkt eine Größe oder Ausdehnung hat, also ein Punkt so groß oder so klein ist als jeder andere Punkt, so *können verschiedene Punkte sich nur durch ihre Lage unterscheiden*.

6. Um Etwas anschaulich zu machen, muß man es nachzeichnen. Weil man aber nichts nachzeichnen kann, was keine Ausdehnung oder Größe hat, so kann man also auch keinen wirklichen Punkt nachzeichnen; er kann nur annähernd dargestellt werden und zwar am besten durch die leiseste Berührung eines recht spitzigen und sich abfärbenden Gegenstandes, z. B. eines gespitzten Griffels,

Bleistiftes u. s. w. gegen einen andern. Ein solcher sichtbarer Punkt heißt ein physischer oder materieller Punkt. Er ist also bloß ein Bild des wirklichen oder mathematischen Punktes; denn selbst der kleinste gezeichnete Punkt hat irgend eine Ausdehnung, sonst wäre er unserem Auge nicht sichtbar. Je feiner also der gezeichnete Punkt ist, desto mehr nähert er sich dem geometrischen oder mathematischen Punkte.

7. Um einen Punkt von einem andern Punkte zu unterscheiden, bezeichnet man sie mit einem Buchstaben aus dem großen oder kleinen lateinischen Alphabete, z. B. Punkt A, Punkt m.

§. 2.

Entstehung und Zeichen der Linie.

1. Bewegt sich ein Punkt, so beschreibt er einen Weg; dieser Weg nun, den der bewegte Punkt bezeichnet, ist eine Linie.

2. Da zwischen dem Anfange und dem Ende der Bewegung eines Punktes die Linie selbst ist, so kann eine Linie auch als die Verbindung zweier Punkte angesehen werden.

3. Da die Linie nicht einen bloßen Ort, sondern einen Weg bezeichnet, so muß sie auch eine Ausdehnung haben; während also der Punkt keine Ausdehnung (Dimension) hat, kommt der Linie eine Ausdehnung zu, nämlich die in die Länge.

4. So wenig ich den Weg sehe, den z. B. meine Fingerspitze, die sich in dem leeren Raume bewegt, beschreibt, so wenig kann ich auch den Weg wahrnehmen, den ein sich bewegender Punkt macht. Die wirkliche (geometrische oder mathematische) Linie muß also, soll sie sichtbar sein, ebenfalls wie der Punkt dadurch dargestellt werden, daß man z. B. auf dem Papier mit einem spitzigen und sich abfärbenden Gegenstande, etwa mit einem Blei, in einem beliebigen Punkte einsetzt und damit in beliebiger Richtung auf dem Papier fortfährt. Der so entstandene Strich oder die materielle (physische) Linie ist die Versinnlichung der geometrischen Linie. Die so dargestellte Linie entspricht zwar der letzteren nicht vollkommen, weil, wenn sie auch noch so fein gezeichnet wäre, sie immer noch irgend eine Ausdehnung hätte, aber sie nähert sich auf jeden Fall der geometrischen Linie um so mehr, je feiner sie gezeichnet ist.

§. 3.
Arten der Linien.

1. Behält ein bewegter Punkt die anfängliche Richtung immer bei, so entsteht eine gerade Linie; ändert er aber auf seinem Wege hin und wieder seine Richtung, so entsteht eine gebrochene Linie. Da diese letztere Art von Linien aber als eine Zusammensetzung zweier oder mehrerer gerader Linien angesehen werden kann, so gehört sie eigentlich unter die geraden Linien. (Fig. 2.)

2. Verändert aber ein bewegter Punkt überall und immer seine Richtung, so entsteht eine krumme Linie.

Ist bei einer krummen Linie die Abweichung des bewegten Punktes eine regelmäßige, verändert sie sich also nach bestimmten Gesetzen, so heißt die krumme Linie vorzugsweise eine gebogene Linie. (Fig. 3.) Nur von der letzten Art wird künftighin die Rede sein.

3. Oefters kommt es vor, daß ein bewegter Punkt eine Zeitlang seine Richtung immer beibehält, dann eine Strecke weit dieselbe in jedem Augenblicke wieder verändert, dann wieder in gleicher Richtung fortgeht u. s. w.; die so entstandene Linie heißt eine gemischte Linie. (Fig. 4.)

4. Es gibt also:

a. gerade Linien, und zwar:
   a) einfache oder gerade Linien im engern Sinne,
   b) zusammengesetzte oder gebrochene Linien;

b. krumme Linien, nämlich:
   a) unregelmäßig krumme (krumme im engern Sinne),
   b) regelmäßig krumme oder gebogene Linien.

c. gemischte Linien, d. h. solche Linien, welche theilweise gerad, theilweise krumm sind.

5. Es gibt nur eine Art von geraden Linien, aber es gibt unzählig viele Arten von krummen und gemischten Linien.

§. 4.
Von den Endpunkten der geraden Linie.

1. Eine Linie kann begrenzt oder unbegrenzt sein. Eine begrenzte Linie ist nun entweder vollständig begrenzt, also auf beiden Seiten, oder unvollständig, indem sie auf der einen Seite begrenzt, auf der andern aber unbegrenzt ist, also einen Anfang aber kein Ende hat.

2. Da jede vollständig begrenzte gerade Linie zwei Stellen hat, wo sie aufhört, so hat auch jede vollständig begrenzte Linie zwei Grenzpunkte, welche man Endpunkte nennt.

3. Man kann sich bei jeder begrenzten Linie einen Anfang und ein Ende denken; deßhalb heißt jener Grenz- oder Endpunkt der Anfangspunkt, dieser der Endpunkt (im engeren Sinne).

4. Eine nach beiden Seiten begrenzte gerade Linie hat immer zwei Endpunkte, eine krumme Linie dagegen hat entweder zwei Endpunkte oder gar keinen.

5. Zwischen dem Anfangs- und Endpunkte liegt die Linie selbst. Wird eine gerade Linie so verkürzt, daß die beiden Endpunkte zusammenfallen, so wird die Linie selbst = 0.

6. Da das Aeusserste einer begrenzten geraden Linie die beiden Endpunkte sind, ohne daß diese letzteren jedoch ein Theil der ersteren sind, so sagt man: die Grenzen der Linien sind Punkte. Während also die Linien eine Ausdehnung haben, haben die Grenzen derselben, oder die Punkte, keine Ausdehnung.

§. 5.

Von der Richtung, in welcher die Punkte gegen einander liegen.

1. Es gibt sechs Hauptrichtungen, sie sind: aufwärts, abwärts, rechts, links, vorwärts, rückwärts.

2. Je zwei von diesen Richtungen sind einander immer entgegengesetzt; welche wohl? — Welche ist der Richtung „abwärts", „rechts" u. s. w. entgegengesetzt?

3. Man spricht auch von einer wagrechten oder wasserrechten Richtung und versteht darunter diejenige Richtung, welche ein stillstehendes Wasser oder der Wagbalken einer gleichstehenden Wage hat.

Welche der sechs Hauptrichtungen fallen mit der wagrechten Richtung zusammen?

4. Ebenso spricht man von einer lothrechten Richtung; darunter versteht man die Richtung, welche ein Loth, d. h. eine an einer Schnur befestigte und freihängende Bleikugel hat. Man heißt sie auch senkrechte Richtung (senkrecht im engern Sinne), obwohl eine senkrechte Richtung nicht immer lothrecht zu sein braucht.

Welche der sechs Hauptrichtungen fallen mit der lothrechten Richtung zusammen?

5. Unter den Hauptrichtungen gibt es solche, welche sich auf dem Papier nicht leicht darstellen lassen; welches sind wohl diese?

6. Es gibt auch Nebenrichtungen, d. h. solche Richtungen, welche zwischen je zwei Hauptrichtungen fallen, nämlich: rechtsaufwärts (zwischen rechts und aufwärts), linksaufwärts, rechtsabwärts, linksabwärts.

7. Ein Punkt gibt keine Richtung an, sondern bloß einen Ort, zwei Punkte geben bloß eine Richtung an, drei Punkte entweder bloß eine Richtung oder drei.

8. Mehrere Punkte können alle in derselben Richtung liegen, sie können aber auch verschiedene Richtungen haben.

9. Es seien die Punkte A, b, c, ... i (Fig. 1.) gegeben, es soll die Lage eines jeden in Beziehung auf den Punkt A gegeben werden.

§. 6.

Von der Entfernung der Punkte.

1. Zwischen 2 Punkten ist nur eine Entfernung (Zwischenraum) möglich, zwischen 3 Punkten sind drei Zwischenräume möglich (zwischen dem ersten und zweiten, dem zweiten und dritten und dem ersten und dritten), zwischen 4 Punkten sind sechs Zwischenräume möglich (zwischen dem ersten und zweiten, dem zweiten und dritten, dem dritten und vierten, dem ersten und dritten, dem zweiten und vierten, und zwischen dem ersten und vierten); zwischen 5 Punkten sind wie viel Zwischenräume möglich? (Antwort: zehn.)

2. Die Punkte können nah oder weit entfernt sein, d. h. sie können kleine oder große Entfernungen haben.

Der Lehrer zeige, daß nah und fern, groß und klein u. s. w. ganz relative Begriffe sind.

3. Wenn die Entfernung zweier Punkte nicht größer und nicht kleiner ist als die Entfernung zweier anderen Punkte, so sagt man: sie haben gleiche Entfernung.

Anmerk. Da die Entfernung zweier Punkte eigentlich durch die dazwischen liegende gerade Linie bestimmt wird, so läßt sich die Gleichheit der Entfernung zweier Punkten-Paare auch so erklären: Wenn man sich die Verbindungslinie zweier Punkte so auf die Verbindungslinie zweier anderen Punkte gelegt denken kann, daß sie solche genau deckt, so sind die Entfernungen bei beiden Punktpaaren gleich groß (vergl. §. 10. Nro. 4. und 5.).

4. Die Entfernungen mehrerer Punkte können aber auch ungleich sein, und zwar kann eine Entfernung 2, 3, 4, u. s. w. mal so

groß sein als eine andere; sie kann aber auch umgekehrt 2, 3, 4 mal kleiner sein als eine andere.

5. Es sollen an Gegenständen Punkte aufgesucht und zugleich das Verhältniß ihrer Entfernungen angegeben werden.

Suchet Punkte auf, welche gleiche Entfernung haben.

Suchet Punkte auf, welche eine doppelte, dreifache u. s. w. Entfernung gegen die zweier gegebenen Punkte haben.

§. 7.

Aufgaben zum Zeichnen mit Punkten (aus freier Hand).

1. Zeichnet drei Punkte, welche in gerader, und dann drei Punkte, welche in nicht gerader Linie (Richtung) liegen.

2. Zeichnet Punkte in gerader Richtung:

a. die Richtung ist willkührlich, also unbestimmt,
b. „ „ „ durch gegebene Endpunkte bestimmt,
c. „ „ „ „ 2 neben einander liegende Punkte bestimmt.

3. Zeichnet Punkte in gleicher Entfernung:

a. die Entfernung der zwei ersten Punkte willkührlich angenommen:
   a) 4 Punkte wagrecht,
   b) 6 „ lothrecht,
   c) 8 „ rechtsschief,
   d) 7 „ linksschief.
b. Die erste Entfernung bestimmt:
   a) 6 wagrechte Punkte,
   b) 8 lothrechte „
   c) 9 linksschiefe „
   d) 7 rechtsschiefe „ .

4. Es sollen Punkte von ungleicher aber bestimmter Entfernung gezeichnet werden, und zwar:

a. 4 Punkte, von denen der nächstfolgende immer noch so weit entfernt ist als der vorhergehende;
b. 3 Punkte, von denen der nächstfolgende 3mal so weit entfernt ist als der vorhergehende.

5. Zwischen 2 Punkten soll eine Reihe von 3, 4 u. s. w. Punkten gezeichnet werden, von welchen je 2 benachbarte Punkte gleiche Entfernung haben.

6. Die Entfernung zwischen 2 gegebenen Punkten soll gleich getheilt werden, und zwar:

a. in 2 gleiche Theile,	d. in 3 gleiche Theile,
b. „ 4 „ „	e. „ 6 „ „
c. „ 8 „ „	f. „ 12 „ „ .

§. 8.
Bezeichnung der Linien.

1. Jede gerade Linie bezeichnet man in der Regel mit zwei Buchstaben, welche entweder aus dem kleinen oder aus dem großen lateinischen Alphabete genommen werden. Von diesen zwei Buchstaben steht der eine am Anfangs=, der andere am Endpunkt. Ist der Anfangspunkt nicht besonders bestimmt, so wird im Aussprechen der Linie der Buchstabe zuerst genannt, welcher im Alphabete vorher kommt; z. B. ab bedeutet die Linie ab und CD bezeichnet eine Linie CD. (Fig. 5.)

Manchmal wird eine gerade Linie, besonders wenn man bloß auf ihre Länge Rücksicht nimmt, nur mit einem Buchstaben bezeichnet, und zwar aus dem kleinen lateinischen Alphabete; dieser Buchstabe darf jedoch nie am Endpunkte der Linie stehen, sondern in der Mitte derselben. (Fig. 5.)

Der Lehrer zeichne eine mehrseitige Figur, etwa ein Sechseck, verbinde je zwei nicht gerade neben einander liegende Ecken durch gerade Linien, so entstehen durch deren Durchschnitte verschiedene Linien. Der Lehrer benenne diese Linien und lasse sie die Schüler aufsuchen, oder aber zeige sie der Lehrer und lasse sie die Schüler bezeichnen.

2. Krumme Linien werden häufig mit mehreren Buchstaben so bezeichnet, daß je einer derselben an einer bedeutenden Krümmung steht. Ausgesprochen werden die Buchstaben der Reihe nach, in der sie stehen, wobei es ziemlich einerlei ist, mit welchem Endbuchstaben man anfängt. Die in Fig. 6. vorkommende Linie würde heißen:

ABCD oder DCBA, aber nicht: ACDB u. s. w.

§. 9.
Nothwendige Bemerkungen über den Kreis und hieher gehörige Uebungen im Zeichnen.

1. Da die Kreislinie gleich beim Anfang der Zeichnungs=Uebungen, wie z. B. beim Ziehen von Parallellinien, beim Zeichnen gleicher Linien, beim Halbiren einer Geraden, beim Errichten oder Fällen eines Perpendikels u. s. w. nothwendig ist, so muß hier vorgegriffen und Einiges vom Kreise vorausgeschickt werden, und zwar:

a. Eine Kreislinie ist eine solche krumme Linie, welche von einem bestimmten Punkte überall gleichweit entfernt ist.

b. Dieser bestimmte Punkt, welcher natürlich innerhalb des Kreises liegt, heißt Mittelpunkt.

c. Diejenige Linie, welche man sich vom Mittelpunkte an irgend einen Punkt der Kreislinie gezogen denkt, heißt Halbmesser. Alle Halbmesser in demselben Kreise sind einander gleich.

d. Denkt man sich von der Kreislinie bloß ein Stück, so heißt dasselbe Kreisbogen (kurz Bogen).

Anm. In Fig. 7. ist C der Mittelpunkt, CD, CE und CF sind Halbmesser, DE, DF und FE sind Kreisbogen, DEF ist die Kreislinie.

e. Schneiden zwei Bogen einander, so heißen sie Kreuzbogen und der Punkt, in dem sie sich schneiden, der Durchschnittspunkt.

f. Wenn man von einem geöffneten Zirkel die eine Spitze im Papier festsetzt, und die andere auf demselben so weit herumbewegt, bis sie an ihren ursprünglichen Ort zurückkehrt, so beschreibt der Zirkel eine Kreislinie; bewegt er sich nicht ganz herum, so beschreibt er bloß einen Bogen. Da die Entfernung der beiden Zirkelspitzen die Entfernung des Mittelpunktes von der Kreislinie ist, so ist die Zirkelweite immer gleich dem betreffenden Halbmesser. Man sagt deßhalb statt: mit einer bestimmten Zirkelweite einen Kreis zu beschreiben, — mit einem bestimmten Halbmesser soll ein Kreis beschrieben werden.

g. Soll also ein bestimmter Kreis oder Kreisbogen beschrieben werden, so müssen immer Mittelpunkt und Halbmesser gegeben sein.

2. Da die nun beginnenden Zeichnungsübungen von jetzt an mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden, so müssen als Vorübungen vorausgehen, theils in ganzer, d. h. ununterbrochener, theils in punktirter, d. h. unterbrochener Linie:

a. Es sollen beliebige gerade Linien in verschiedenen Richtungen und in verschiedener Stärke (Dicke) gezeichnet werden.

b. Zwischen zwei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen.

Anm. Als Probe für das richtige Verbinden zweier gegebenen Punkte durch eine gerade Linie kann folgendes Verfahren gelten: Man nehme (Fig. 20.) einen Punkt A an, ziehe von ihm aus drei verschiedene Linien AB, AC und AD; nehme einen zweiten Punkt E an, ziehe von ihm aus zwei Linien EF und EG, welche die vorigen Linien in L, M und N und in H, K und J schneiden, verbinde je zwei gegenüberliegende Durchschnittspunkte durch die geraden Linien HM, KL, KN und JM, welche sich wieder in O und P schneiden; sind nun die Punkte richtig durch gerade Linien verbunden, so muß sich durch die Punkte E, O und P eine gerade Linie ziehen lassen.

c. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie in beliebiger Richtung zu ziehen.
d. Durch einen gegebenen Punkt mehrere gerade Linien in verschiedenen Richtungen zu ziehen.
e. Einen beliebigen Kreis zu beschreiben.
f. Von einem gegebenen Punkte aus einen beliebigen Kreis zu beschreiben.
g. Mit einem gegebenen Halbmesser in beliebiger Lage einen Kreis zu beschreiben.
h. Von einem gegebenen Punkte aus mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu beschreiben.
i. Unter denselben Voraussetzungen einen Kreisbogen zu beschreiben.
k. Von zwei gegebenen Punkten aus mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Kreuzbogen zu beschreiben.
l. Von den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie mit zwei gegebenen ungleichen Halbmessern Kreuzbogen zu beschreiben.
m. Dieselbe Uebung wie bei Nro. k und l sowohl ober- als unterhalb der gegebenen Punkte oder der gegebenen Linie.
n. Es soll von einer Linie ein bestimmtes Stück abgeschnitten werden.
o. Von einem gegebenen Punkte aus eine Linie von bestimmter Länge zu ziehen.
p. Von einer Linie 3, 4, 5 u. s. w. gleiche Stücke abzuschneiden.
q. Von einem gegebenen Punkte aus mehrere, z. B. 4 beliebige aber gleiche gerade Linien zu ziehen.
r. Es sollen von einem Punkte aus mehrere, z. B. 6 gleiche gerade Linien von gegebener Größe gezogen werden.

§. 10.

Von der Größe der Linien.

1. Unter der Größe einer Linie versteht man die Größe der Entfernung ihrer Endpunkte.

2. Wird die Größe zweier oder mehrerer Dinge überhaupt gegenseitig verglichen, so können immer zwei Fälle stattfinden: entweder sind diese Dinge gleich groß, oder sie sind nicht gleich groß, d. h. ungleich.

Anm. Dinge können ihrer Größe nach gleich, in andrer Hinsicht dagegen, nach Farbe, Stoff u. s. w., ungleich sein.

3. Auch zwei gerade Linien können gleich oder ungleich sein.

4. Zwei gerade Linien sind einander gleich, wenn die Endpunkte der einen eben so weit von einander entfernt sind als die der andern. Die geraden Linien dagegen, deren Endpunkte ungleiche Entfernungen von einander haben, sind ungleich, und zwar ist diejenige gerade Linie größer als eine andere, deren Endpunkte eine größere Entfernung haben, als die der letztern.

5. Legt man bei gleichen Linien den Anfangspunkt der einen auf den der andern, und beide Linien der Richtung nach auf einander, so müssen auch die beiden Endpunkte auf einander fallen, die Linien also einander vollkommen decken. Man sagt daher: Gleiche Linien decken einander, und: Linien, die einander decken, sind gleich.

Ungleiche Linien decken einander nicht.

6. Von zwei ungleichen Linien kann die größere um ein bestimmtes Stück größer sein als die kleinere, sie kann aber auch 2, 3, 4 u. s. w. mal so groß sein als die kleinere, wogegen diese dann 2, 3, 4 u. s. w. mal kleiner, also die Hälfte, der 3te, 4te Theil jener Linie ist.

7. Zwei Linien heißen commensurabel zu einander, wenn sich eine dritte finden läßt, die auf beide genau wiederholtemale aufgetragen werden kann; so läßt sich (Fig. 8.) die Linie m auf die Linie ab zweimal und auf cd dreimal auftragen: ab und cd sind also commensurabel.

8. Auch eine gerade und eine krumme Linie können gleich groß sein, nur sind natürlich ihre Endpunkte nicht gleich weit entfernt.

Anm. Man denke sich einen gebogenen Draht, den man nachher gerade macht, in beiden Fällen wird die Größe dieselbe sein.

9. Durch die beiden Endpunkte ist die Größe einer geraden Linie vollkommen bestimmt; denn zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

10. Eine gerade Linie kann vergrößert, d. h. größer gemacht, und verkleinert, d. h. kleiner gemacht werden.

11. Größer wird eine Linie gemacht dadurch, daß man sie verlängert. Dieß kann geschehen:

a. entweder am Anfangspunkt, oder
b. am Endpunkt, oder
c. an beiden zugleich.

Aufgabe 1. Wie groß muß die gleiche Verlängerung auf beiden Seiten sein, wenn dieselbe in Allem gleich der gegebenen Linie sein soll? wie groß aber, wenn die Verlängerung im Ganzen $1/2$ oder zweimal so groß sein soll als die gegebene Linie?

Aufgabe 2. Eine gegebene Linie soll dreimal so groß werden als sie vorher ist: wie viel muß sie auf beiden Seiten verlängert werden, wenn die Verlängerungen gleich groß sein sollen, wie viel aber, wenn sie 5-, 7-, 8mal so groß sein soll?

Aufgabe 3. Wenn die ganze neue Linie (Verlängerung und gegebene

Linie) 7mal so groß sein soll als die gegebene Linie, wie groß wird die gleiche Verlängerung auf jeder Seite sein?

12. Die Verlängerung einer geraden Linie ist nun entweder

a. eine ungleichmäßige, indem man die Linie um ein beliebiges Stück verlängert, oder

b. eine gleichmäßige, indem die Verlängerung das 2=, 3=, 4= u. s. w. fache der gegebenen Linie wird.

13. Kleiner gemacht wird eine Linie, indem man

a. ein beliebiges Stück von ihr abschneidet, und zwar:

a) entweder vom Anfangspunkt aus, oder

b) vom Endpunkt aus, oder

c) von beiden zugleich;

b. einen bestimmten Theil von ihr nimmt.

14. Das Zeichen der Gleichheit ist =, z. B. AB=CD, d. h. Linie AB ist so groß als CD.

Das Zeichen der Ungleichheit ist $\lessgtr$ und zwar $<$, wenn die erste Größe (Linie) kleiner ist als die zweite, z. B. ab $<$ mo heißt: Linie ab ist kleiner als mo. Das andere Zeichen $>$ wird gesetzt, wenn die erste Größe größer ist als die zweite, z. B. mo $>$ ab, d. h. Linie mo ist größer als Linie ab.

§. 11.

Die vier Rechnungsarten mit geraden Linien.

A. Anleitung zum Zeichnen.

Wie bei den Zahlen, so gibt es auch bei den geraden Linien vier Rechnungsarten. Soll nämlich

1) eine Linie gesucht werden, welche so groß ist als zwei andere gegebene Linien, so müssen sie, d. i. ihre Längen, addirt werden und ihre Summe gibt dann die zu suchende Linie. Man kann diese Summe auf zweierlei Art finden, indem man

a. entweder die eine der gegebenen Linien verlängert und die Verlängerung gleich der andern gegebenen Linie macht. Es seien z. B. (Fig. 9.) die Linien AB und CD gegeben; soll man nun ihre Summe finden, so verlängere man AB nach G beliebig, schneide von B aus von BG ein Stück BE = CD ab, so ist AE die Summe von AB und CD;

b. oder indem man eine neue Linie zeichnet, welche gleich der Summe der gegebenen Linien ist. Zu dem Ende zeichnet man

eine Linie MN von unbestimmter Länge (Fig. 10.), trägt nun auf diese von M aus die Linie AB = MO und von O aus die Linie CD = OP, so ist MP die verlangte Summe.

Ebenso verfährt man, wenn man die Summe von mehr als zwei Linien sucht. Soll aber

2) eine Linie von der andern abgezogen d. h. ihre Differenz (Unterschied) gesucht werden, so schneide man von einer Linie gleich der größeren ein Stück ab, so groß wie die kleinere, so ist das übrige Stück der ersteren Linie gleich dem Unterschied zwischen der größern und der kleinern Linie. Es soll z. B. (Fig. 11.) die Differenz gesucht werden zwischen der Linie EF und GH, so ziehe man eine Linie NO = der größeren Linie GH, schneide von N aus ein Stück NP = der kleinern Linie EF ab, so ist PO die verlangte Differenz.

3) Auch multiplicirt, d. h. gleichmäßig vergrößert kann eine gerade Linie werden. Soll nun

a. die Multiplication an der gegeben Linie selbst vorgenommen werden, so verlängert man dieselbe beliebig und trägt die gegebene nach und nach so oft auf die Verlängerung, als die um 1 verminderte Zahl, welche sagt, wie oft die gegebene Linie genommen werden soll, Einheiten hat. Man soll z. B. (Fig. 12.) die gegebene gerade Linie ab 5mal nehmen; man trägt deßhalb auf die Verlängerung bn die ab 5 — 1, d. i. 4mal, so erhält man das Produkt ap, welches = 5mal ab ist. Soll aber

b. eine neue Linie gesucht werden, welche das 4fache einer Gegebenen ab sei (Fig. 13.), so zeichnet man eine Linie von unbestimmter Länge qr, trägt auf dieselbe von q aus die Länge der ab 4mal, also gerade so oft als die Zahl, welche anzeigt, das Wievielfache die neue Linie von der gegebenen sein soll, Einheiten hat, so wird qs = 4ab sein.

Endlich kann

4) eine gerade Linie in gleiche Theile getheilt d. h. dividirt werden.

Der Punkt, durch welchen eine Linie getheilt wird, heißt Theilungspunkt. Die Anzahl der Theilungspunkte ist immer um 1 kleiner als die Anzahl der Theile. Soll z. B. eine Linie in 10 Theile getheilt werden, so braucht man 10—1, d. i. 9 Theilungspunkte, zu 20 Theilen 19 Punkte u. s. w.

Es soll nun eine gerade Linie getheilt werden:

a. in 2, 4, 8 u. s. w. gleiche Theile:

a) in 2 gleiche Theile:

a. wenn die zu theilende Linie nicht zu lang ist; hier gibt es zwei Auflösungen:

aa) die Theilungslinie stehe lothrecht;

Auflösung. Ist die zu theilende Linie AB (Fig. 14.), so beschreibe man von den beiden Endpunkten A und B aus mit beliebigen aber gleichen Halbmessern auf beiden Seiten der Linie Kreuzbogen, verbinde deren Durchschnittspunkte C und D durch eine gerade Linie CD, so wird durch diese AB in E halbirt.

Anm. Damit die zu beschreibenden Bogen einander schneiden, so muß der Halbmesser immer größer als die Hälfte der zu theilenden Linie sein.

bb) Die Theilungslinie stehe schief.

Auflösung. Man beschreibe von dem einen Endpunkte A (Fig. 15.) aus mit beliebigem Halbmesser einen Bogen und einen gleichen vom Endpunkt B aus, aber auf der entgegengesetzten Seite der AB; dann mit einem größern oder kleinern Halbmesser als der vorige von dem zweiten Endpunkt B aus, aber auf der Seite, auf welcher der erste Bogen von A aus beschrieben wurde, und endlich einen gleichen Bogen auf der entgegengesetzten Seite von dem Endpunkte A aus; verbinde dann die beiden Durchschnittspunkte C und D durch die gerade Linie CD, so schneidet diese die AB in der Mitte.

b. wenn die Linie so lang ist, daß von den Endpunkten aus nicht wohl Kreuzbogen beschrieben werden können;

Auflösung. Man schneidet von den beiden Endpunkten der gegebenen Linie AB (Fig. 16.) aus gleiche Stücke AD und BC ab, welche aber kleiner sein müssen als die Hälfte der Linie, beschreibe nun über DC, wie in a, Kreuzbogen, verbinde dieselben durch eine gerade Linie, so theilt diese die AB in 2 gleiche Theile.

c. wenn die zu theilende Linie eine solche Lage hat, daß nur auf einer Seite derselben Bogen beschrieben werden können;

Auflösung. Man beschreibe (Fig. 17.) von den beiden Endpunkten A und B der gegebenen AB aus mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Bogen, die sich in C schneiden, aus denselben Punkten mit zwei andern aber gleichen Halbmessern wieder Kreuzbogen, ziehe durch deren Durchschnittspunkt D und durch C die gerade Linie DE, so theilt diese die AB in E in 2 gleiche Theile.

b. wenn gar kein Lineal zur Halbirung gebraucht werden soll;

Auflösung. Man beschreibe mit der gegebenen Linie ba (Fig. 18.) als Halbmesser von einem ihrer Endpunkte z. B. von b aus einen Bogen ap, etwas größer als der Halbkreis, schneide mit derselben Zirkelöffnung drei gleiche Stücke ah, hg und gc ab; beschreibe von c und a aus mit dem Halbmesser ca die Bogen an und cm; von a aus beschreibe mit ah und von c aus mit cg die Bogen hl und gf; endlich beschreibe von c aus mit der Weite fl einen Bogen, so wird dieser die Gegebene ab in d halbiren.

Anm. Mit Hülfe dieser Auflösung läßt sich auch zwischen zwei gegebenen Punkten a und b ein dritter in ihrer Mitte liegender Punkt d finden, ohne die beiden gegebenen Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden. Hat man nämlich die Construktion so weit, daß man von c aus mit der Entfernung fl einen Bogen beschrieben hat, so beschreibt man noch zum Schlusse von l aus mit dem Halbmesser la ebenfalls einen Bogen, welcher den ersteren Bogen in d schneidet, so ist dieser Durchschnittspunkt in der Mitte von b und a.

c. wenn sich weder über noch unter der zu theilenden Linie Bogen beschreiben lassen;

Auflösung. Diese Auflösung kann nur nach dem Augenmaß, also nicht immer ganz genau ausgeführt werden. Man findet nämlich den Theilungspunkt, wenn man von den beiden Endpunkten M und N (Fig. 19.) der gegebenen Linie MN mit einem Halbmesser, der nicht viel kleiner oder größer ist als die Hälfte der Linie, Bogen beschreibt, welche MN in A und B (B und A) schneiden, das dazwischen befindliche Stück AB halbirt man nach dem Augenmaß aus freier Hand.

Anm. Eine Probe für das richtige Halbiren der Linie mit dem Zirkel wäre Folgendes: Man nehme 3 Punkte A, B und C an (Fig. 51.), verbinde sie durch die geraden Linien AB, AC und BC, halbire diese 3 Linien in den Punkten D, E und F, verbinde den Punkt D mit C, E mit B und F mit A, so müssen, wenn richtig halbirt worden ist, diese 3 Linien einander in einem Punkte schneiden.

b) in 4 gleiche Theile:

Auflösung. Man halbirt, wie oben, die Linie AB in C (Fig. 21.); jede dieser Hälften AC und CB wird wieder in D und E in zwei gleiche Theile getheilt: so ist die Aufgabe gelöst.

c) in 8 gleiche Theile:

Auflösung. Man theile die gegebene Linie zuerst in 2, dann in 4 gleiche Theile, und halbire wieder jeden der letztern, so ist die Linie in 8 gleiche Theile getheilt.

b. in 3 gleiche Theile:

1ste Auflösung. Man beschreibe von den beiden Endpunkten a und b (Fig. 22.) der gegebenen Linie ab mit dieser als Halbmesser Kreuzbogen, die sich in c und f schneiden, ziehe ac und bc, und verbinde deren Halbirungspunkte d und e durch die geraden Linien df und ef mit dem Punkte f, so theilen diese beiden Linien die gegebene Linie ab in m und n in 3 gleiche Theile.

2te Auflösung. Man halbire ab in e (Fig. 23.), beschreibe von e aus mit eb oder ea einen Halbkreis, mit demselben Radius schneide von a und b aus von dem Halbkreis die Stücke ac und bd ab, beschreibe von a und b aus mit ab als Halbmesser Bogen, die sich in f schneiden, ziehe cf und df, so theilen diese die ab in m und n in 3 gleiche Theile.

c. überhaupt in jede beliebige Anzahl gleicher Theile:

1ste Auflösung (durch Construktion eines gleichseitigen Dreiecks). Will man z. B. eine Linie AB (Fig. 24.) in 6 gleiche Theile theilen, so ziehe man eine beliebig lange Linie CH, trage von C auf dieselbe 6 beliebig große aber gleiche Stücke CM, MN, NO, OP, PQ und QD, beschreibe von C und D aus mit CD als Halbmesser Bogen, die sich in E schneiden, ziehe EC und ED, schneide von E aus die beiden Stücke EF und EG, jedes gleich AB ab, (sollte aber AB länger sein als EC und ED, wie in Fig. 25., so verlängere diese letztern Linien, bis die verlängerten EF und EG gleich AB sind), ziehe FG, verbinde E mit den Punkten M, N, O, P und Q durch die Linien EM, EN, EO, EP und EQ, so wird durch diese auch FG, d. i. AB in 6 gleiche Theile getheilt.

2te Auflösung (durch Parallelen; da aber das Ziehen von Parallelen erst in §. 14. gezeigt wird, so kann diese Art, Linien in gleiche Theile zu theilen, erst später vorgenommen werden, ebenso ist es mit den folgenden Auflösungsarten). Man lege an die zu theilende Linie AB (Fig. 26.) in schiefer Richtung eine Linie AC an von unbestimmter Länge, trage auf diese von A aus so viel beliebig lange aber gleiche Theile, als man für AB Theile verlangt, hier z. B. die 7 gleichen Stücke AD, DE, EF, FG, GH, HJ und JK, verbinde den Punkt K mit B, ziehe mit BK an AB von den Punkten J, H, G, F, E und D aus die Parallelen JJ', HH', GG' u. s. w., so wird durch diese auch AB in 7 gleiche Theile getheilt werden.

3te Auflösung (durch Anlegen gleicher Winkel). Man

lege an die gegebene Linie AB (Fig. 27.) in A unter einem beliebigen spitzen Winkel die gerade Linie AC von beliebiger Länge an, und an B in entgegengesetzter Richtung unter dem gleichen Winkel die Linie BD, trage auf beide so viele beliebige aber gleiche Stücke, als die AB Theile enthalten soll (hier z. B. 6), und verbinde die zunächst gegenüberliegenden Punkte A und A', E und E', F und F' u. s. w. durch gerade Linien, so wird durch diese auch die Gegebene AB in 6 gleiche Theile getheilt werden.

Anm. Diese Auflösung könnte auch mit Umgehung des Anlegens gleicher Winkel auf folgende Art ausgeführt werden. Man lege an AB in A unter schiefer Richtung die AC, trage wieder wie oben auf dieselbe die 6 gleichen Stücke AE, EF u. s. w., ziehe LB, beschreibe von B aus mit AL und von A aus mit BL Bogen, die sich in A' schneiden, ziehe BA', schneide von derselben nach und nach die Stücke BJ' = AE, BH' = AF, BG' = AG u. s. w. ab, und ziehe, wie oben, die Linien AA', EE' u. s. w.

4te Auflösung (durch entgegengesetzte Perpendikel an den Endpunkten). Man errichte (Fig. 28.) in A und B als den Endpunkten der gegebenen Linie AB auf entgegengesetzten Seiten beliebig lange Perpendikel AC und BD, trage auf beide mit beliebiger Zirkelöffnung so viele gleiche Stücke an weniger 1, als die Linie AB Theile haben soll. Will man also hier z. B. AB in 6 gleiche Theile theilen, so lege man auf beide Perpendikel von A und B aus 5 gleiche Theile an. Man verbinde dann den äußersten Punkt der auf AC angelegten Theile mit dem der AB nächsten auf der Linie BD, nämlich 5 mit 1, dann die nächsten, also 4 mit 2, dann 3 mit 3 u. s. f. Dadurch wird AB in 6 gleiche Theile getheilt.

d. in Theile nach gegebenem Verhältniß.

Anm. Obgleich diese Art, eine gerade Linie zu theilen, eigentlich nicht hieher gehört, da hier bloß vom Theilen in gleiche Theile die Rede ist, so soll sie doch der Vollständigkeit wegen hier einen Platz finden.

1) Das Verhältniß ist in Zahlen gegeben;

a) eine gerade Linie AB in 2 solche Theile zu zerlegen, welche sich zu einander verhalten wie 2:3.

Auflösung. Man lege an AB (Fig. 29.) unter einem beliebigen spitzen Winkel eine Linie AC an, trage auf sie 2+3, d. i. 5 beliebige aber gleiche Theile an, verbinde den letzten Punkt D mit B, ziehe mit BD durch den zweiten Punkt E eine Parallele, so wird durch sie die AB auf die verlangte Art getheilt, denn es verhält sich AF:FB = AE:ED = 2:3.

b) eine Gerade AB in drei solche Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten wie 1:2:3.

Auflösung. Man trage auf AC (Fig. 30.) einen, dann 2, dann 3, also im Ganzen 6 gleiche Theile, und verbinde den 6ten Punkt mit B, ziehe mit dieser Linie durch den 3ten und 1sten Punkt Parallelen, so wird durch sie AB auf die verlangte Art getheilt.

2) Das Verhältniß ist in Linien gegeben.

Auflösung. Man lege an die gegebene Linie AB (Fig. 31.) unter beliebigem spitzem Winkel eine Linie an von unbestimmter Länge, trage auf sie von A aus nach einander die Linien, nach deren Verhältniß getheilt werden soll, so daß z. B. AD = a, DE = b sei, ziehe EB und mit dieser parallel DF, so wird durch diese AB nach dem gegebenen Verhältniß getheilt; es wird sich verhalten: AF : FB = AD : DE = a : b.

B. Aufgaben zum Zeichnen über die 4 Rechnungsarten mit geraden Linien.

a. Summe und Differenz werden gesucht:

1) Zwei gerade Linien sind gegeben, man soll die Summe dieser beiden Linien suchen.
2) Es sind drei gerade Linien gegeben, man soll eine vierte Linie suchen, welche so groß ist als die 3 gegebenen Linien.
3) Von 2 ungleichen Linien sei die kleinere und der Unterschied beider gegeben, man soll die größere suchen.
4) Zwischen 2 gegebenen Linien soll die Differenz gesucht werden.
5) Von 2 Linien sei die größere und der Unterschied beider gegeben, es soll die kleinere Linie gesucht werden.
6) Die Summe zweier ungleicher Linien ist gegeben, ebenso eine jener beiden, es soll die andere gesucht werden.

b. das Vielfache einer gegebenen Linie wird gesucht:

7) eine gerade Linie sei gegeben, man soll eine zweite zeichnen, die das Doppelte der ersteren sei, d. h. welche 2 solcher Theile habe, wie die gegebene einen.
8) Man soll eine Linie zeichnen, welche das 3fache einer gegebenen Linie sei.
9) Von einer Linie sei der 5te Theil gegeben, man soll die ganze Linie suchen.
10) Es sollen 2 Linien gezeichnet werden, wovon die 1ste $^2/_3$ der 2ten sei, d. h. von welchen die 1ste 2 solcher Theile habe, deren die 2te 3 hat.
11) Man soll 2 Linien zeichnen, deren Größen sich zu einander verhalten wie 4:5.

12) Es seien 2 Linien zu zeichnen, die sich zu einander verhalten wie $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, d. h. wie 4:3.

c. ein bestimmter Theil einer Linie wird gesucht.

13) Eine gegebene gerade Linie soll in 2 gleiche Theile getheilt werden.
14) Zeichnet 2 Linien und theilet die eine in 4, die andere in 8 gleiche Theile.
15) Von einer gegebenen geraden Linie soll der 16te Theil gesucht werden.
16) Man soll eine gegebene Linie in 3 gleiche Theile theilen.
17) Eine gegebene Linie soll in 5 gleiche Theile getheilt werden.
18) Von einer gegebenen Linie soll der 7te Theil gesucht werden.
19) Man soll $\frac{3}{4}$ einer gegebenen geraden Linie suchen.
20) Man zeichne eine Linie, welche $\frac{5}{6}$ einer gegebenen Linie sei.
21) Eine gegebene Linie sei $\frac{2}{3}$ einer andern Linie, die Größe letzterer soll gesucht werden.
22) Man soll 2 Linien zeichnen, wovon die erste $\frac{7}{8}$ und die andere $\frac{3}{4}$ einer gegebenen Linie sei.
23) Eine gerade Linie soll in 2 Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie 2:3.
24) Man soll eine gerade Linie in 3 Theile theilen nach dem Verhältniß 2:3:4.
25) Man soll eine gegebene gerade Linie so in 2 Theile theilen, daß sich dieselben zu einander verhalten wie 2 andere gegebene gerade Linien a und b.

§. 12.

Von der Richtung der geraden Linien.

1. Da ein bewegter Punkt jede beliebige Richtung nehmen kann, so muß es auch Linien von jeder beliebigen Richtung geben. Es gibt lothrechte, wagrechte und schiefe Linien. Letztere können entweder rechtsschief oder linksschief sein.

2. Wagrecht ist auf dem Papier eine Linie, wenn sie dieselbe Richtung hat wie der obere und untere Rand eines gleich- und rechtwinklig beschnittenen Papiers. Im Zimmer sind wagrecht alle Linien, welche dessen Fußboden und Decke, oben und unten die Thüre, Schultafel, Fenster und jede einzelne Fensterscheibe begrenzen.

3. Lothrecht ist eine Linie auf dem Papier, wenn sie dieselbe Richtung wie der linke und rechte Rand desselben hat. Lothrechte Linien im Zimmer sind die, welche die Wände, die Thüren, die Fenster und jede einzelne Scheibe rechts und links begrenzen.

4. Schief ist auf dem Papier eine Linie, wenn sie die Richtung derjenigen Linie hat, welche man sich von der obern rechten

Ecke zur untern linken, oder von der obern linken zur untern rechten Ecke gezogen denkt.

5. Eine wagrechte Linie kann entweder von der Rechten zur Linken, oder von der Linken zur Rechten gezogen werden.

Eine lothrechte Linie kann von oben nach unten, oder von unten nach oben gezogen werden.

Eine schiefe Linie kann man rechtsaufwärts, linksaufwärts, linksabwärts und rechtsabwärts ziehen.

6. Durch einen Punkt lassen sich unzählige Linien ziehen, wovon jede eine andere Richtung haben kann, daher ist durch einen Punkt die Richtung einer Linie nicht bestimmt.

7. Durch 2 Punkte jedoch ist die Richtung einer geraden Linie vollkommen bestimmt; denn alle Linien, welche 2 Punkte mit einander gemein haben, fallen auf einander, haben also dieselbe Richtung.

8. Linien unterscheiden sich, wie jede Raumgröße, nur durch ihre Form, Lage und Größe; deßhalb ist auch durch die beiden Endpunkte eine gerade Linie vollkommen bestimmt.

§. 13.

Gegenseitige Lage gerader Linien zu einander.

1. Gerade Linien können nahe beisammen oder weit aus einander sein; sie können neben oder über einander liegen.

2. Zwei gerade Linien können eine solche Lage zu einander haben, daß, wenn man sie verlängert, sie

a. zusammentreffen; man heißt sie deßhalb ungleichlaufende Linien oder nichtparallele Linien (im weitern Sinne). Hier können zwei Fälle vorkommen:

a) entweder bilden sie verlängert eine gerade Linie — man heißt sie Linien von einerlei Richtung — (Fig. 32.);

b) oder sie bilden nach ihrer Verlängerung keine gerade, sondern eine gebrochene Linie, haben also ungleiche Richtungen. Solche Linien heißen vorzugsweise ungleichlaufende Linien (ungleichlaufend im engern Sinn), und zwar sind sie

aa) zusammenlaufend (convergirend), wenn man die beiden Punkte, bei welchen die Linien am weitesten auseinander stehen, als die Anfangspunkte jener Linien betrachtet (Fig. 33.);

bb) aus einander laufend (divergirend), wenn jene Punkte die Endpunkte der beiden Linien sind (Fig. 34.).

b. nie zusammentreffen, also überall gleiche Entfernung haben; solche Linien heißen gleichlaufende oder parallele Linien (Parallellinien) (Fig. 35.).

3. Es können mehr als zwei Linien parallel laufen, wie z. B. in Fig. 36.

4. Welche gerade Linien sind immer parallel, welche nie? Welche gerade Linien können parallel und wieder nicht parallel sein? Welche Arten von schiefen Linien können nie parallel laufen?

5. Suchet im Zimmer Linien auf, welche einerlei Richtung haben, dann ungleichlaufende Linien und endlich Parallellinien.

6. Welche von den obengenannten 3 Arten von Linien kommen im Zimmer am häufigsten vor? Was für Linien bilden die Geleise zweier an derselben Achse befindlichen Räder, die Schienen einer Eisenbahn u. s. w.?

Gebet selbst Fälle an, wo Parallellinien vorkommen.

7. Es gibt auch Parallellinien zwischen Parallellinien (Fig. 36.).

8. Das Zeichen der Parallellinien ist: ⋕; AB ⋕ CD heißt: die Linie AB ist parallel der Linie CD.

§. 14.

Anleitung Parallellinien zu zeichnen.

A. Parallelen in beliebiger Entfernung.

a. Zwei Parallelen.

1ste Auflösung. Man lege an die gerade Linie AB (Fig. 37.), mit welcher eine Parallele gezogen werden soll, eine der Seiten des hölzernen rechten Winkels genau an, an eine andere Seite des letzteren ein Lineal; schiebe nun an dem Lineal, welches festgehalten wird, den Winkel beliebig weit auf- oder abwärts (je nachdem man die Parallele über oder unter der Gegebenen haben will), ziehe endlich an der ursprünglich an die AB angelegten Seite des Winkels eine Linie CD, so ist dieß die verlangte 2te Parallele.

2te Auflösung. Man beschreibe (Fig. 38.) von 2 beliebigen Punkten der gegebenen Linie AB, z. B. von C und D aus, mit 2 beliebigen aber gleichen Halbmessern Bogen, ziehe durch die äußersten Punkte E und F derselben eine gerade Linie GH, so ist dieß die verlangte 2te Parallele.

3te Auflösung. Beschreibe über der gegebenen Linie AB

(Fig. 39.) aus einem beliebigen Punkte derselben einen Halbkreis, schneide von den beiden Punkten C und D aus, wo der Kreis die gegebene Linie trifft, zwei beliebige aber gleiche Stücke CE und DF ab, ziehe durch E und F eine Gerade GH, so ist dieß die verlangte Linie.

4te Auflösung. Man nehme auf AB (Fig. 40.) 2 nicht zu nahe gelegene Punkte C und D an, beschreibe von ihnen aus mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Bogen, schneide von letzteren gleiche Stücke EF und GH ab, ziehe durch die Punkte F und H eine Linie, so ist diese die verlangte.

5te Auflösung. Nimm auf der AB (Fig. 41.) einen Punkt C an, schneide auf beiden Seiten desselben gleiche Stücke CD und CE ab, beschreibe von D und C und wieder von C und E aus mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Kreuzbogen, die sich in F und G schneiden; ziehe durch diese Punkte eine Gerade MN, so ist dieß die verlangte zweite Parallele.

Anm. Will man sich überzeugen, ob Parallellinien richtig gezeichnet sind, so wende man entweder die auf Seite 20 gezeigte 1ste Auflösung an, indem man mit dem Winkel bis an die neugezeichnete Parallele fortrückt, und dann sieht, ob dieselbe genau an den Rand des Winkels paßt, oder man nehme außerhalb den Parallelen AB und CD (Fig. 43.) einen beliebigen Punkt E an, ziehe von diesem aus 3 beliebige Linien EF, EG und EH, welche die Parallelen in J, K, L, M, N und O schneiden, verbinde je zwei gegenüberliegende Durchschnittspunkte durch die Linien JN, KO, KM und LN, verbinde deren Durchschnittspunkte P und Q durch die Gerade RS, so muß diese zu den beiden Parallellen ebenfalls parallel sein.

b. Mehrere Parallelen.

1ste Auflösung. Man führe eine der obigen Auflösungen sowohl ober- als unterhalb der gegebenen Linie aus.

2te Auflösung. Hat man auf eine der früher angegebenen Arten eine 2te Parallele gezogen, so betrachtet man diese wieder als 1ste und zeichnet über (oder unter) dieser eine neue (die 3te) und dann die 4te u. s. f.

3te Auflösung. Man zeichne (Fig. 36.) 2 beliebige Parallelen, welche aber die entgegengesetzte Richtung der gegebenen Linie haben und von dieser durchschnitten werden: trage von den beiden Durchschnittspunkten aus auf die 2 Parallelen gleiche Stücke und zwar immer so viel Stücke, als man Parallelen wünscht, weniger 1, und verbinde die gleichliegenden Punkte durch gerade Linien.

B. Parallelen in gegebener (bestimmter) Entfernung.

a. Die Entfernung durch eine gegebene Linie bestimmt.

1ste Auflösung. Man beschreibe von 2 Punkten der gegebenen Linie AB (Fig. 42.) aus mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Entfernung M Bogen, verbinde ihre äußersten Punkte C und D durch eine Gerade GH, so ist dieß die verlangte Parallele.

2te Auflösung. Man errichte auf der gegebenen Linie AB (Fig. 44.) 2 nicht zu nahe Perpendikel CE und DF, jeden gleich der gegebenen Entfernung M und ziehe durch deren Endpunkte eine Gerade GH, so hat diese die verlangte Eigenschaft.

(Diese Auflösungsart kann natürlich erst vorkommen, wenn der Schüler Perpendikel errichten gelernt hat.)

b. Die Entfernung durch einen Punkt bestimmt.

1ste Auflösung (durch den hölzernen Winkel und das Lineal). Man rücke den Winkel (Fig. 37.) so lange fort, bis die entsprechende Seite den gegebenen Punkt berührt.

2te Auflösung (durch Bogen). Man nehme auf AB (Fig. 45.) einen Punkt C an, der etwas entfernt von dem bestimmten Punkte P liegt, beschreibe von C aus mit CP einen Bogen, der die AB in D schneidet, und von D aus mit dem gleichen Halbmesser einen Bogen CG, schneide von CG ein Stück CF=PD ab, ziehe durch P und F eine gerade Linie LH, so ist dieß die verlangte Parallele.

3te Auflösung (durch Bogen). Man beschreibe (Fig. 46.) von dem gegebenen Punkte P aus mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, der die AB in C schneidet, und von C aus mit demselben Halbmesser den Bogen PD, mache CE = PD, und ziehe durch P und E eine gerade Linie MN, so hat man das Verlangte.

4te Auflösung (durch Gegenwinkel). Man ziehe von P (Fig. 49.) auf AB eine beliebige Linie PC, und verlängere dieselbe rückwärts beliebig, beschreibe von C aus mit einem Halbmesser, der kleiner ist als CP, einen Bogen DE, und von P aus mit demselben Halbmesser einen zweiten Bogen, schneide von ihm ein Stück FG=DE ab, ziehe durch P und G eine gerade Linie, so ist dieß die verlangte.

5te Auflösung (durch Wechselwinkel). Ziehe wieder (Fig. 47.) von P auf AB eine beliebige schiefe Linie PC, beschreibe von C aus mit einem Halbmesser, kleiner als CP, einen Bogen DE, von P aus mit demselben Halbmesser auf der entgegengesetzten

Seite der CP einen beliebigen Bogen, schneide von ihm ein Stück FG=DE ab, ziehe durch P und G eine gerade Linie, so ist dieß die gesuchte 2te Parallele.

6te Auflösung (durch concentrische Kreise). Man ziehe (Fig. 50.) von P nach AB die schiefe Linie PC, verlängere dieselbe rückwärts beliebig, beschreibe von einem beliebigen Punkte D aus auf derselben mit verschiedenen Halbmessern die beiden Kreise, welche durch P und C gehen, verbinde den Punkt D mit dem Durchschnittspunkte E durch eine gerade Linie, welche den kleinen Bogen in F schneidet, ziehe durch P und F eine Linie, so ist diese die verlangte Parallele.

7te Auflösung (durch Construktion eines Parallelogramms). Ziehe von P (Fig. 48.) aus auf AB 2 beliebige schiefe Linien PC und PD, beschreibe von P aus mit CD und von C aus mit PD Kreuzbogen, die sich in E schneiden; ziehe durch P und E eine gerade Linie, so hat man die verlangte 2te Parallele.

§. 15.

Zeichnen-Aufgaben über ungleichlaufende und gleichlaufende Linien.

A. Ungleichlaufende Linien.

a. In gleicher Richtung.

1. Es sollen 3 Linien von verschiedener Länge so gezeichnet werden, daß sie gehörig verlängert eine gerade Linie bilden.

2. Es sollen 4 gleichlange Linien so gezeichnet werden, daß sie in einer Richtung liegen.

3. Man zeichne in derselben Richtung 5 gerade Linien so, daß die nächstfolgende immer um ein beliebiges Stück größer sei als die vorhergehende.

4. Dieselbe Uebung, nur daß die nächstfolgende immer um ein gleiches Stück größer sei als die vorhergehende.

5. Es sollen 4 Linien in derselben Richtung so gezeichnet werden, daß die nächstfolgende immer das Doppelte der vorhergehenden sei.

6. Zeichnet 4 Linien in derselben Richtung, daß die 2te um ein beliebiges Stück größer sei als die 1ste, die 3te um 2 solcher Stücke größer als die 2te, und die 4te um 3 solcher Stücke größer als die 3te.

7. Zeichnet 3 Linien in gerader Richtung, welche sich zu einander verhalten wie 3:5:8.

8. Man soll 5 Linien in gleicher Richtung so zeichnen, daß die nächstfolgende immer um ein bestimmtes Stück kleiner werde als die vorhergehende.

9. Man zeichne 4 Linien in derselben Richtung so, daß die nächstfolgende immer die Hälfte der vorhergehenden sei.

10. Zeichnet 3 Linien so, daß sie verlängert eine gerade Linie bilden, und deren Größen sich zu einander verhalten wie $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ (wie 6:4:3).

b. In nicht gleicher (ungleicher) Richtung.

11. Es sollen von einem Punkte aus von der Linken zur Rechten gleiche Linien gezogen werden, nach und nach übergehend von der wagrechten Richtung zur rechtsschiefen, und zwar
a) rechts aufwärts, b) rechts abwärts.

12. Dieselbe Uebung, nur von der rechten zur Linken gezogen, und zwar
a) links aufwärts, b) links abwärts.

13. Es sollen von einem Punkte aus von oben nach unten gleiche Linien gezogen werden und zwar von der lothrechten Richtung nach und nach übergehend zur schiefen, nämlich
a) rechts sich neigend, b) links sich neigend.

14. Von 2 ungleichlaufenden aber nicht zusammentreffenden Linien soll der Durchschnittspunkt gesucht werden (durch Verlängerung derselben in Punkten).

15. 2 Linien, welche sich in einem gewissen Punkte schneiden, sind gegeben, es soll noch eine ungleichlaufende Linie gezogen werden, welche sich in demselben Punkte schneidet.

16. Es sollen 3 ungleichlaufende Linien so gezeichnet werden, daß — verlängert — sie sich in einem einzigen Punkte schneiden.

B. Gleichlaufende oder Parallel=Linien.

a. Parallelen von gleicher Größe.

a) Zwei Parallelen:

17. Zeichnet auf alle möglichen Arten 2 gleiche Parallelen von beliebiger Entfernung.

18. Zeichnet 2 gleiche Parallelen, deren Entfernung gleich einer gegebenen Linie sei.

19. Es soll zu einer gegebenen Linie eine Parallele gezeichnet werden, welche durch einen gegebenen Punkt geht (verschiedene Auflösungsarten).

20. Es sollen durch 2 gegebene Punkte 2 gleiche Parallelen gezogen werden.

b) Mehrere Parallelen:

21. Zeichnet 4 gleiche Parallelen in ungleicher Entfernung.

22. Es sollen 5 gleiche Parallelen in gleicher aber beliebiger Entfernung gezeichnet werden.

23. Es seien 4 gleiche Parallelen zu zeichnen, deren Entfernungen durch 4 gegebene Linien bestimmt sind.

24. Man soll 5 gleiche Parallellinien zeichnen, deren Entfernungen gleich einer gegebenen geraden Linie seien.

25. 4 Punkte sind gegeben, durch diese sollen gleiche Parallellinien gezogen werden, ohne daß die Richtung der ersten Linie bestimmt ist.

26. Durch 5 bestimmte Punkte sollen gleiche Parallelen gezeichnet werden, und zwar

a) in linksschiefer, b) in rechtsschiefer Richtung.

27. 2 Parallelen sind gegeben, zwischen diese sollen 6 andere Parallelen in entgegengesetzter Richtung und beliebigen Entfernungen gezeichnet werden.

28. Dieselbe Uebung mit 8 Parallelen, welche gleiche Entfernung haben sollen.

29. Zeichnet 9 gleiche Parallelen von gleicher Entfernung so, daß die Endpunkte in schiefer (linksschiefer und rechtsschiefer) Richtung liegen.

30. Zeichnet 9 gleichgroße und gleichweit entfernte Parallelen so, daß die Anfangs- und Endpunkte je zweier nicht unmittelbar auf einander folgenden Linien eine lothrechte Linie bilden.

31. Zeichnet gleiche und gleichentfernte Parallelen so, daß ihre Endpunkte eine gebrochene Linie bilden.

b. Parallelen von ungleicher Größe.

a) Die Größe überhaupt bestimmt:

32. Zeichnet 6 Parallelen von gleicher Entfernung so, daß die nächstfolgende immer beliebig größer werde als die vorhergehende.

33. Es sollen 6 Parallelen in gleichen Entfernungen so gezeichnet werden, daß die nächstfolgende immer beliebig kleiner werde als die vorhergehende.

34. Man soll 9 wagrechte Parallelen zeichnen, deren Anfangspunkte eine gerade Linie bilden, und welche so zu- und wieder abnehmen, daß die mittlere Linie die größte ist, und die äußersten die kleinsten sind.

35. Zeichnet unter denselben Bedingungen 11 lothrechte Linien.

36. Es sollen 7 rechtsschiefe und wieder 7 linksschiefe Parallelen unter obigen Bedingungen gezeichnet werden.

37. Zeichnet 9 gleich weit entfernte wagrechte Parallelen, welche so zu- und wieder abnehmen, daß die mittlere Linie die größte ist und die beiden äußersten die kleinsten sind, und deren Anfangspunkte sowohl als deren Endpunkte eine gebrochene Linie bilden.

38. Dieselbe Uebung mit 9 senkrechten Parallelen.

39. Dieselbe Uebung mit einer beliebigen aber ungeraden Zahl linksschiefer und ebensoviel rechtsschiefer Parallelen.

40. Ziehet gleich weit entfernte Parallelen so, daß die mittlere die kleinste ist und die äußersten am größten sind, und zwar 15 lothrechte und 15 wagrechte.

b) Die Größe in einem bestimmten Verhältniß angegeben:

41. Eine Linie sei gegeben, es soll mit dieser eine 2te Parallele gezogen werden, welche das Doppelte der ersteren sei.

42. Es soll mit einer gegebenen Geraden eine Parallele gezeichnet werden, die das 3fache der ersteren sei.

43. Zeichnet 2 Parallelen, wovon die 2te das 4fache der ersteren sei.

44. Zeichnet 6 Parallelen so über einander, daß die nächstfolgende immer um die erste größer sei als die zunächst vorhergehende.

45. Man zeichne 4 Parallelen so über einander, daß die nächstfolgende immer um die doppelte erste Linie größer sei als die nächstvorhergehende.

46. Zeichnet eine gerade Linie, theilet sie in eine ungerade Anzahl gleicher Theile, z. B. 7, ziehet mit dieser 3 andere Parallelen so, daß die nächstfolgende immer um 2 solcher Theile kleiner sei als die vorhergehende und daß die Endpunkte in schiefer Richtung sind.

47. Zeichnet 5 Parallelen, welche sich zu einander verhalten wie: $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{9}:\frac{1}{12}:\frac{1}{18}$ (d. i. wie 9:6:4:3:2).

48. Zeichnet 4 Parallelen, wovon die nächstfolgende immer das Doppelte ist der vorhergehenden.

49. Es sollen 3 Parallelen so gezeichnet werden, daß die nächstfolgende immer das 3fache der vorhergehenden sei.

50. Man soll 5 Parallelen zeichnen, wovon die nächstfolgende immer die Hälfte der vorhergehenden sei.

c. Zusammensetzungen von Parallelen.

51. Man soll selbst Zusammensetzungen von Parallellinien bilden. (Hier ist ein schönes Feld für die Selbstthätigkeit der Schüler offen.)

§. 16.

Höchste Anzahl der Durchschnittspunkte einer bestimmten Anzahl von Linien.

1. Wenn zwei Linien sich in je einem ihrer Endpunkte berühren, so sagt man: sie treffen sich.

2. Verlängert man solche 2 Linien über ihren gemeinschaftlichen Punkt hinaus, so sagt man nicht mehr: sie treffen sich, sondern sie schneiden sich. Wie können sich aber 2 Linien schneiden, ohne daß man sie verlängert?

3. Der Punkt, in welchem sich Linien treffen, heißt Berührungspunkt oder Vereinigungspunkt; der, in welchem sie sich schneiden, Schneidungspunkt oder Durchschnittspunkt.

4. Linien treffen oder berühren einander, wenn sie mit ihren Endpunkten einander berühren, und sie schneiden sich, wenn sie einander zwischen ihren Endpunkten berühren.

5. In einem Punkte können sich 2 oder auch mehrere Linien berühren; mehrere Linien können sich aber auch in mehreren

Punkten berühren. 4 Linien können sich z. B. in einem Punkt vereinigen, aber auch in 2, 3 und 4 Punkten.

6. Eine gerade Linie kann eine andere also in einem Punkte schneiden, von mehreren gegebenen Linien kann jede die andere in einem Punkt durchschneiden. Sind z. B. 5 gerade Linien gegeben, so kann jede dieser 5 Linien die übrigen 4 Linien durchschneiden, also alle 5 Linien die übrigen 5.4, d. i. 20mal; 5 Linien könnten demnach 20 Durchschnittspunkte bilden. Nun ist aber jeder Durchschnittspunkt doppelt gezählt, indem jeder Punkt je 2 Linien angehört; man muß deßhalb obiges Produkt wieder durch 2 dividiren, wodurch für 5 Linien $^{20}/_{2}$ d. i. 10 Durchschnittspunkte herauskommen.

Ueberhaupt erhält man die höchste Anzahl von Durchschnittspunkten einer bestimmten Anzahl von Linien, wenn man diese Anzahl mit der um 1 verminderten Zahl multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt.

Da bei obiger Multiplikation immer der eine der beiden Faktoren eine gerade und der andere eine ungerade Zahl ist, so läßt sich immer von einem derselben die Hälfte ohne Rest nehmen, und man kann die Ausrechnung obiger Regel dadurch abkürzen, daß man den ungeraden Faktor mit der Hälfte des geraden multiplicirt.

7 Linien geben also: $\frac{7.\ 6}{2}$ oder 7. 3= 21 Durchschnittspunkte.

9	"	"	"	$\frac{9.\ 8}{2}$	"	9. 4= 36	"	"
10	"	"	"	$\frac{10.\ 9}{2}$	"	5. 9= 45	"	"
14	"	"	"	$\frac{14.13}{2}$	"	7.13= 91	"	"
16	"	"	"	$\frac{16.15}{2}$	"	8.15=120	"	"
19	"	"	"	$\frac{19.18}{2}$	"	19. 9=171	"	"
24	"	"	"	$\frac{24.23}{2}$	"	12.23=276	"	"

7. Man kann die höchste Anzahl aller Durchschnittspunkte auch dadurch erhalten, daß man die natürliche Reihe der ganzen Zahlen von 1 an bis zu der Zahl (diese mit

inbegriffen), welche der gegebenen Zahl der geraden Linien vorhergeht, addirt.

Bei 7 geraden Linien also: $1+2+3+4+5+6=21$ Durchschnittspunkte; bei 10 geraden Linien: $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ Durchschnittspunkte u. s. w.

Obige Regel wird durch Folgendes erläutert:

Eine gerade Linie bildet keinen Durchschnittspunkt, die 2te Linie durchschneidet die 1ste, bildet also 1 Durchschnittspunkt, die 3te Linie durchschneidet die beiden ersten, bildet also 2 Durchschnittspunkte, die 4te Linie durchschneidet die 3 vorhergehenden, bildet also 3 Durchschnittspunkte, die 5te Linie durchschneidet die 4 vorhergehenden, bildet also 4 Durchschnittspunkte u. s. f.

Folglich bilden die 1ste, 2te, 3te, 4te Linie zusammen $0+1+2+3$ Durchschnittspunkte.

Es ist hieraus einleuchtend, daß jede folgende Linie so viele Durchschnittspunkte liefert, als vorher schon Linien gegeben waren. Die 10te kann also alle 9 vorhergehenden geraden Linien durchschneiden; sie liefert also 9 neue Punkte, und 10 gerade Linien überhaupt werden als höchste Anzahl der Durchschnittspunkte geben: $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$.

§. 17.

Höchste Anzahl von Linien, die sich zwischen einer bestimmten Anzahl Punkte ziehen lassen.

1. Zwischen 2 Punkten läßt sich nur eine gerade Linie ziehen.

2. Zwischen 3 Punkten sind höchstens 3 gerade Linien möglich (wann bloß eine?).

3. Um die höchste Anzahl gerader Linien zu finden, welche zwischen einer gegebenen Anzahl Punkte möglich sind, bedenke man, daß jeder Punkt mit einem andern (vorausgesetzt, daß nicht mehr als 2 Punkte in gerader Linie liegen) durch eine gerade Linie verbunden werden kann.

Sind z. B. der Punkte 6, so kann ich von jedem Punkte nach den 5 andern Punkten gerade Linien ziehen, also von jedem Punkte aus 5 Linien, von 6 Punkten aus also $6 . 5 = 30$ Linien. Da aber jede dieser Linien doppelt vorkommt, indem z. B. die Linie, welche den 1sten Punkt mit dem 2ten verbindet, dieselbe ist, welche vom 2ten Punkte zu dem 1sten gezogen wird, so drückt das Produkt

6 . 5 oder 30 die mögliche Anzahl der Linien doppelt aus. Man muß daher von diesem Produkte die Hälfte nehmen, so hat man die wirkliche Anzahl; es sind also zwischen 6 Punkten $\frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ gerade Linien möglich.

4. Da es aber einerlei ist, ob man ein Produkt durch 2 dividirt, oder bloß einen Faktor desselben, so läßt sich die höchste Anzahl von Linien auch dadurch finden, daß man von einem Faktor (dem, welcher eine gerade Zahl ist) die Hälfte nimmt und diese mit dem andern (ungeraden) multiplicirt. Zwischen 9 Punkten gibt es also $\frac{9.8}{2} = 9 \cdot 4 = 36$ Linien.

5. Man erhält also die höchste Anzahl gerader Linien, welche zwischen einer gegebenen Anzahl Punkte möglich sind, wenn man die Anzahl der Punkte mit der um 1 verminderten Zahl multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt, oder wenn man entweder die Hälfte der Anzahl (im Fall die letztere eine gerade Zahl sein sollte) mit der um 1 verminderten Zahl oder (wenn die Anzahl eine ungerade Zahl wäre) die Anzahl der Punkte mit der Hälfte der um 1 verminderten Zahl multiplicirt.

Zwisch. 4 Punkt. sind also höchst. $\frac{4.3}{2} = 2.3 = 6$ Lin. mögl.
„ 5 „ „ „ „ $\frac{5.4}{2} = 5.2 = 10$ „ „
„ 8 „ „ „ „ $\frac{8.7}{2} = 4.7 = 28$ „ „
„ 10 „ „ „ „ $\frac{10.9}{2} = 5.9 = 45$ „ „
„ 11 „ „ „ „ $\frac{11.10}{2} = 11.5 = 55$ „ „
„ 16 „ „ „ „ $\frac{16.15}{2} = 8.15 = 120$ „ „
„ 20 „ „ „ „ $\frac{20.19}{2} = 10.19 = 190$ „ „
„ 27 „ „ „ „ $\frac{27.26}{2} = 27.13 = 351$ „ „
„ 100 „ „ „ „ $\frac{100.99}{2} = 50.99 = 4950$ „ „

6. Will man umgekehrt aus der Anzahl der geraden Linien auf die Anzahl der Punkte schließen, die sie verbinden, so braucht man nur zu wissen, daß man die Anzahl der Linien fand, indem man die Anzahl der Punkte mit der um 1 verminderten multiplicirte und dieses Produkt durch 2 dividirte; die gegebene Anzahl der Linien ist also die Hälfte des Produkts. Man nehme daher die Zahl der Linien doppelt, so hat man das ganze Produkt, welches durch die Multiplikation zweier um 1 verschiedener Zahlen entstanden ist. Man hat also nur 2 Zahlen zu suchen, die um 1 verschieden sind und deren Produkt gleich der doppelten Anzahl der geraden Linien ist; dann gibt der größere der Faktoren die gesuchte Zahl der Punkte an.

Die Anzahl der Linien sei z. B. 28, so ist dieses die Hälfte eines Produkts, also das Produkt selbst 2.28 = 56; dieses ist aber durch Multiplication zweier um 1 verschiedener Zahlen entstanden, nämlich 8 und 7. Demnach ist 8 die gesuchte Anzahl der Punkte.

Anm. Natürlich kann die Anzahl der geraden Linien keine beliebige Zahl sein, weil sich nicht immer 2 Zahlen finden, die um 1 verschieden sind und mit einander multiplicirt eine bestimmte Zahl zum Produkt geben.

§. 18.

Vom Messen der Linien.

1. Eine Größe messen heißt: bestimmen, in welchem Verhältnisse sie zu einem angenommenen bekannten Grundmaße, d. h. das Wievielfache oder der wievielte Theil jene Größe von dem gegebenen Maße ist.

2. Eine Linie läßt sich bloß durch eine Linie messen; demnach muß das Maß einer Linie wieder eine Linie sein.

3. Als Maß für die Linien nimmt man die gerade Linie, weil sie durch ihre 2 Endpunkte vollkommen bestimmt ist.

4. Die gerade Linie, welche als Maß dienen soll, muß demnach eine bekannte Linie sein; sie wird bei dem Messen als Einheit angenommen.

5. Weil die Linien eine Ausdehnung in die Länge haben, so nennt man das Maß der Linien Längenmaß.

6. In älteren Zeiten waren die Maße mehr willkührlich und nicht ganz fest; man nahm z. B. als Maß den Schritt, die Arm- und Handlänge, die Hand- und Fingerbreite u. s. w. Am häufigsten benützte man die Länge eines Mannsfußes. Aber auch

dieses Maß war immer noch sehr schwankend und unbestimmt, da nicht alle Vorderfüße gleiche Länge haben; man nahm deßhalb eine bestimmte (konstante) Größe an, welche so ziemlich die Mitte hielt und welcher man den Namen Schuh oder Fuß gab. So ist demnach der Fuß oder Schuh ein Längenmaß.

7. Will ich nun eine gerade Linie messen, so untersuche ich, wie oft ein Schuh auf dieselbe gelegt werden kann, d. h. ich untersuche, wie oft die Länge eines Fußes in der der gegebenen Linie enthalten ist. Läßt sich z. B. die Länge eines Fußes genau 8mal auf die Länge einer Linie auftragen, ist also die Länge dieser Linie das 8fache einer andern Linie, die die Größe eines Fußes hat, so sagt man: diese Linie messe 8 Fuß oder 8 Schuh.

8. Da es aber oft unbequem und sogar unsicher ist, wenn man eine bedeutende Länge zu messen hat, wie z. B. einen Acker, so hat man ein größeres Maß als den Fuß angenommen, das aber doch von diesem abgeleitet, also nur ein Mehrfaches eines Fußes ist. Man nennt nämlich eine Länge von 10 Fuß eine Ruthe; eine Ruthe ist also gleich 10 Schuh.

9. Ebenso theilt man, um ein kleineres Maß als den Schuh zu erhalten, denselben in 10 gleiche Theile; ein solcher Theil heißt dann ein Zoll. 10 Zoll geben also 1 Schuh.

Auch den Zoll theilt man wieder in 10 gleiche Theile, und nennt einen solchen Theil eine Linie; 1 Zoll ist also gleich 10 Linien.

Sollte es nothwendig sein, so theilt man wieder die Linie in 10 Punkte.

10. Man hat also folgende Längenmaße: Ruthe, Schuh (Fuß), Zoll, Linie, Punkt, und zwar ist

1 Ruthe = 10 Fuß,
1 Fuß = 10 Zoll,
1 Zoll = 10 Linien,
1 Linie = 10 Punkten.

11. Da dieses Maß ganz aus dem Decimalsystem hervorgegangen ist, so nennt man es auch das Decimalmaß oder neues Maß, im Gegensatz gegen das Duodecimalmaß (altes, rheinländisches Maß), bei welchem man ebenfalls von dem oben angenommenen Längenmaß, dem Fuß, ausgeht, aber 16 Fuß zu 1 Ruthe nimmt, den Schuh in 12 Zoll theilt, diesen in 12 Linien, und die Linie in 12 Punkte.

Man muß daher jedesmal bestimmt angeben, ob man das

Decimal- oder das Duodecimalmaß als Maß angenommen hat.

12. Aus dem bisher Gesagten geht hervor:

a. daß bei beiden Maßen die Schuh oder Fuß gleich sind;

b. daß bei dem Duodecimalmaß die Ruthe größer ist, und zwar um 6 Fuß, als die Ruthe bei dem Decimalmaß; sie verhalten sich nämlich zu einander wie 16:10 oder wie 8:5;

c. daß dagegen ein Zoll, eine Linie, ein Punkt bei dem Duodecimalmaß kleiner ist als ein Zoll, eine Linie, ein Punkt des Decimalmaßes, und daß sich die ersteren zu den letzteren verhalten, wie 10:12 oder 5:6;

d. daß 1 Ruthe des Duodecimalmaßes gleich $^8/_5$ Ruthen des Decimalmaßes und umgekehrt, daß 1 Ruthe des Decimalmaßes gleich $^5/_8$ Ruthen des Duodecimalmaßes sei.

Ferner, daß 1 Zoll (Linie, Punkt) des Decimalmaßes $= {}^6/_5$ Zoll (Linien, Punkte) des Duodecimalmaßes, oder umgekehrt 1 Zoll (Linie, Punkt) des Duodecimalmaßes $= {}^5/_6$ Zoll des Decimalmaßes sei.

Soll also eine Anzahl Ruthen des Decimalmaßes in Ruthen des Duodecimalmaßes verwandelt werden, so multiplicirt man die Anzahl der Ruthen mit $^5/_8$, d. i. man multiplicirt die Ruthenanzahl mit 5 und dividirt das Produkt durch 8.

76 Ruthen des Decimalmaßes geben also $= \frac{76 . 5}{8}$ $= {}^{380}/_8 = 47^4/_8 = 47^1/_2$ Ruthen Duodecimalmaß.

Aufgabe. Ein Haus hat eine Länge von 48 Ruthen Decimalmaß, wie viel Ruthen sind dieß nach dem Duodecimalmaß?

Soll man umgekehrt eine Anzahl Ruthen des Duodecimalmaßes in Ruthen des neuen Maßes verwandeln, so multiplicirt man die Anzahl mit $^8/_5$, d. i. mit 8 und dividirt das Produkt durch 5.

112 Ruthen Duodecimalmaß sind also $= \frac{112 . 8}{5} = {}^{896}/_5$ $= 179^1/_5$ Ruthen Decimalmaß.

Aufgabe. Ein Acker hat eine Länge von 56 Ruthen und eine Breite von $11^1/_2$ Ruthen Duodecimalmaß; wie lang und breit ist er nach dem Decimalmaß?

Will man ferner 1 Zoll (Linie, Punkt) des Duodecimalmaßes in Zoll (Linien, Punkte) des Decimalmaßes verwandeln, so multiplicire man die Anzahl mit $^5/_6$; demnach geben 9 Zoll Duodecimalmaß $\frac{5.9}{6} = {}^{45}/_6 = 7^1/_2$ Zoll Decimalmaß.

Will man umgekehrt eine Anzahl Zoll (Linien, Punkte) Decimalmaß in Zoll (Linien, Punkte) Duodecimalmaß ausdrücken, so multiplicirt man dieselbe mit 6 und dividirt das Produkt durch 5.

c. 1 Zoll Decimalmaß ist $^1/_{10}$ Schuh, 1 Zoll Duodecimalmaß ist $^1/_{12}$ Schuh, folglich ist 1 Zoll Decimalmaß um $^1/_{60}$ größer als ein Zoll nach dem Duodecimalmaß. Um wie viel ist aber 1 Ruthe Duodecimalmaß größer als 1 Ruthe Decimalmaß?

13. Man bezeichnet der Kürze halber die Ruthe mit einem kleinen Ringe rechts oben an der Zahl (^{0}), den Schuh oder Fuß mit 1 ebendaselbst angebrachten Häckchen ($'$), den Zoll mit 2 Häckchen ($''$), die Linie mit 3 Häckchen ($'''$) und den Punkt mit 4 Häckchen ($''''$). So heißt z. B. $48^0\ 6'\ 5''\ 9'''\ 4''''$ so viel als 48 Ruthen, 6 Fuß, 5 Zoll, 9 Linien und 4 Punkte.

Nach dem Decimalmaß ist:

$$1^0 = 10'$$
$$1' = 10''$$
$$1'' = 10'''$$
$$1''' = 10''''.$$

Nach dem Duodecimalmaß ist:

$$1^0 = 16'$$
$$1' = 12''$$
$$1'' = 12'''$$
$$1''' = 12''''.$$

14. Aufgaben:

a. 27^0 sind wie viel Fuß (Decimalmaß)?
83^0 „ „ „ „ (Duodecimalmaß)?
$4^0 6'$ „ „ „ „ (Decimalmaß und wie viel Duodecimalmaß)?
$5^0\ 7'$ sind wie viel Zoll (Decimal- und Duodecimalmaß)?
$6^0\ 4'\ 5''$ sind wie viel Zoll (Duodecimal- und Decimalmaß)?
$2^0\ 7'\ 6''\ 8'''$ sind wie viel Linien (nach beiden Maßen)?
$36^0\ 4''$ sollen in Linien verwandelt werden (nach beiden Maßen).
$4^0\ 5''\ 8''''$ geben wie viel Punkte (nach beiden Maßen)?
$1471''$ sind wie viel Ruthen (nach beiden Maßen)?
$44675'''$ „ „ „ „ „ „ „ ?

b. 45^0 Duodecimalmaß sind wie viel Ruthen Decimalmaß?
$12'$ Duodecimalmaß sind wie viel Schuh Decimalmaß?
$9''$ Duodecimalmaß sind wie viel Zoll Decimalmaß?
18^0 Decimalmaß sind wie viel Ruthen Duodecimalmaß?
$8'$ Decimalmaß sind wie viel Schuh Duodecimalmaß?
$4^0\ 7'$ Decimalmaß sollen in das Duodecimalmaß verwandelt werden.

$6^0\ 7''\ 5'''$ Decimalmaß sollen in das Duodecimalmaß verwandelt werden.
$3^0\ 6'\ 4''\ 6'''$ Decimalmaß sollen in das Duodecimalmaß verwandelt werden.
$16^0\ 5'$ Duodecimalmaß sollen in das Decimalmaß verwandelt werden.
$9^0\ 7'\ 8''''$ Duodecimalmaß sollen in das Decimalmaß verwandelt werden.
$6^0\ 5'\ 4''\ 9'''\ 6''''$ Duodecimalmaß sollen in das Decimalmaß verwandelt werden.

c. Wie groß ist die Summe zweier gerader Linien, von denen die eine $8'\ 5''$, die andere $7'\ 9''\ 10'''$ (Duodecimalmaß) lang ist?

Von zwei Linien sei die eine $3^0\ 7'\ 4'''$, die andere $2^0\ 7''\ 4'''\ 5''''$ (Decimalmaß) lang, wie lang sind beide?

Von zwei Linien mißt die größere $8'\ 7''$, der Unterschied beider Linien ist $2'\ 9''\ 7'''\ 5''''$; wie groß ist die kleinere (Decimalmaß)?

Wenn aber die kleinere $7^0\ 5''\ 8'''$ mißt, und der Unterschied beider $3^0\ 5'\ 7'''\ 6''''$ ist, wie groß ist die größere? und wie groß ist die Summe beider Linien (Duodecimalmaß)?

Wie groß ist die Summe zweier gleicher Linien, von denen jede $4^0\ 8'\ 5''\ 7'''$ lang ist (Decimalmaß)?

Eine Linie ist das Dreifache einer andern, welche $15^0\ 6''\ 7'''$ (Decimalmaß) lang ist, wie lang ist erstere?

Wie viel beträgt das Sechsfache einer Linie, welche $4^0\ 5'''\ 2''''$ (Duodecimalmaß) lang ist?

Wenn das Doppelte einer Linie $25^0\ 11''\ 4'''$ (Duodecimalmaß) beträgt, wie lang ist diese Linie selbst?

Eine Linie ist der fünfte Theil einer $26^0\ 4'\ 9'''\ 7''''$ (Decimalmaß) langen Linie, wie lang ist erstere?

Wie groß ist die Differenz zweier Linien, von denen eine 100^0, die andere $97^0\ 6'\ 7''\ 5'''$ (Duodecimalmaß) lang ist?

In einem Zimmer ist die Stubenthür $9'\ 3''$ hoch, ein Fenster aber nur $5'\ 9''$ (Decimalmaß); um wie viel ist die Thür höher als das Fenster?

In einem Hause sind zwei Zimmer, das eine hat eine Länge von $3^0\ 5'\ 8''$, das andere von $1^0\ 7'\ 5''$ (Duodecimalmaß); um wie viel ist ersteres länger?

Ein Balken mißt $4^0\ 6'\ 3''\ 2'''$; nun werden aber davon abgesägt $1^0\ 9'\ 4''\ 3'''$ (Decimalmaß); wie groß ist das übrige Stück noch?

Es soll ein Weg von $126^0\ 8'\ 5''$ Länge gemacht werden; wenn nun nach einiger Zeit ein Stück von $84^0\ 9'\ 6''$ (Decimalmaß) fertig wird, was bleibt noch zu machen übrig?

Ein Bauer hat von seinem $28^0\ 2'\ 4''$ langen Acker wegen Erbauung einer Eisenbahn an den Staat ein Stück von $19^0\ 8'\ 6''$ (Duodecimalmaß) Länge abgetreten; wie lang ist das ihm übrig bleibende Stück noch?

In einem Schulzimmer sind 16 Bänke, von denen jede eine Länge von 7′ 2″ hat; welche Länge haben sie mit einander (Decimalmaß)?

Ein Schreiner verarbeitet 24 Bretter, jedes 1′ 2″ breit; welche Breite haben sie mit einander (Duodecimalmaß)?

Ein Pferd hat in einer Minute 58° 8′ zurückgelegt; wie weit könnte es nach dieser Geschwindigkeit in einer Viertelstunde kommen?

Ein Zimmer ist mit 14 gleich breiten Brettern belegt; welche Breite wird nun jedes Brett haben, wenn das Zimmer 23′ 6″ (Decimalmaß) breit ist?

Vor einem Orte liegen 25 gleich breite Aecker, die zusammen eine Breite von 51° 7′ 5″ messen; wie breit ist jeder?

Ein Arbeiter hat in 45 Tagen einen Straßengraben ausgeworfen, dessen Länge 196° 6′ 6″ (Decimalmaß) beträgt; wenn er nun jeden Tag gleich viel arbeitete, wie viel rückte er jeden Tag in seiner Arbeit vor?

Wenn in einem Stalle 88 Pferde neben einander längs einer Wand von 44° Länge Platz haben, wie viel Raum ist für jedes Pferd bestimmt?

Ein Baumstamm hat eine Länge von 7° 5″ (Duodecimalmaß), ein anderer 10° 7′ 6″ (Decimalmaß); welcher ist länger und um wie viel?

15. Sollen gemessene Längen auf dem Papier dargestellt werden, so kann dieß natürlich nur in kleinerm Maß geschehen. Ruthen, Schuh, Zoll müssen so klein dargestellt werden, daß sie noch ausführbar sind und daß man jede beliebige Länge auf das Papier auftragen kann. Man zeichne zu diesem Zwecke einen sogenannten verjüngten (verkleinerten) Maßstab, wie z. B. in Fig. 53.

Man ziehe nämlich eine Linie AE so klein wie möglich, doch noch so groß, daß sie in 10 gleiche Theile getheilt werden kann; theile sie in 10 gleiche Theile. Denkt man sich nun AE = 1 Ruthe, so wäre also einer der 10 Theile gleich 1 Schuh; nimmt man aber AE als 1 Schuh an, so ist ein Theil davon = 1 Zoll. Verlängert man nun AE so, daß AE=EF=FG=GH=HB ist, so wäre also, wenn AE = 1° sein soll, AF = 2°, AG = 3°, AH = 4°, AB = 5°. Demnach wäre Bn = 4° 4′, Gm = 2° 7′, und wenn man AE = 1′ annimmt, so ist Gm = 2′ 7″.

Will man nun auch Zoll (Punkte), so errichte man in A den Perpendikel BD=AE, und in B den Perpendikel BC=AE, ziehe DC. Auf DC werden sich nun auch 5 gleiche Theile, jeder = AE, tragen lassen; theile DM ebenfalls in 10 gleiche Theile, ebenso AD und BC, ziehe ME, LF, KG, JH, ferner Ee, db u. s. w. bis oD,

ebenso rK u. s. w. Rechnet man nun das Stück gh, welches zwischen eE und ME ist, so ist dieses Stück = 1 Zoll, das Stück von sv zwischen obigen Linien = 4'' und das Stück von tw = 6'' u. s. w. Demnach wäre pq = 4⁰ 3' 3''; zx = 4⁰ 7' 6''.

Der Lehrer lasse demnach Linien von gegebener Länge ziehen, wie z, B. eine Linie, welche 3⁰ 5' 2'' lang ist.

Alle vorstehenden zum Ausrechnen gegebenen Aufgaben lassen sich auch hier zum Zeichnen verwenden.

Zweiter Abschnitt.

Der Winkel.

---

§. 19.

Entstehung des Winkels.

1. Denken wir uns 2 gerade Linien von einem Punkte auslaufen, und lassen die eine derselben um diesen Punkt sich drehen, also nach verschiedenen Richtungen hin sich bewegen, so nennt man den Unterschied zwischen den Richtungen dieser beiden Linien einen Winkel.

Ein Winkel ist also der Unterschied zwischen den Richtungen zweier von einem Punkte auslaufenden geraden Linien.

2. Die Größe jener drehenden Bewegung, oder die Größe der Richtungsänderung gibt die Größe des Winkels an.

3. Auch krumme Linien können Winkel bilden.

§. 20.

Bestandtheile des Winkels.

1. Die den Winkel bildenden (einschließenden) Linien nennt man die Schenkel des Winkels. Jeder Winkel hat demnach 2 Schenkel.

2. Derjenige Punkt, an welchem der Winkel aufhört, oder in

welchem die beiden Linien einander treffen, heißt Scheitelpunkt oder Scheitel, auch Spitze des Winkels. Die Spitze eines Winkels kann jede beliebige Lage haben.

Die Spitze des Winkels heißt von außen betrachtet Ecke.

3. Winkelraum oder Winkelfläche heißt derjenige Raum, welcher zwischen den Schenkeln des Winkels ist und theilweise von den Schenkeln begrenzt wird, nach der Seite aber, nach welcher die Schenkel aus einander gehen, also der Spitze gegenüber, als unbegrenzt angesehen wird.

§. 21.

Bezeichnung des Winkels.

1. Statt des Wortes „Winkel" gebraucht man öfters der Kürze wegen das Zeichen ∠, meint man 2 oder mehrere Winkel, wird also das Wort „Winkel" in der Mehrzahl gebraucht, so setzt man das Zeichen doppelt, also ∠∠.

2. Um die verschiedenen Winkel von einander unterscheiden zu können, muß man sie bezeichnen; dieß kann auf zweierlei Art geschehen (Fig. 52.):

a. durch einen Buchstaben, den man zwischen die Schenkel des Winkels in die Nähe der Spitze schreibt, und der gewöhnlich aus dem kleinen lateinischen Alphabete genommen wird;

b. durch 3 Buchstaben, gewöhnlich aus dem großen Alphabete. Man stellt nämlich an jedes Ende der Schenkel einen Buchstaben und den 3ten an die Spitze, der letztere muß aber beim Lesen oder Schreiben immer in der Mitte sein. Der Winkel in Fig. 52. wird gelesen ∠ ACB, oder BCA, nie aber CAB, oder ABC, oder BAC, oder CBA.

3. Besteht ein Winkel aus 2 oder mehreren Theilen, so darf man nur, wenn man den ganzen Winkel will, die Buchstaben an den äußersten Schenkeln und den an der Spitze nehmen; so ist z. B. (Fig. 54.) ∠ ABC = ∠ ABE + ∠ EBD + ∠ DBC. Soll aber ein solcher zusammengesetzter Winkel mit kleinen Buchstaben bezeichnet werden, welche zwischen den Schenkeln der Theilwinkel stehen, so müssen sämmtliche einzelne Winkel, aus denen der ganze Winkel besteht, durch das Additionszeichen (+) verbunden werden; so ist in Fig. 54. ∠ ABC = ∠ a + ∠ b + ∠ c.

4. Aufsuchen und Benennen sämmtlicher in Fig. 55. vorkommenden Winkel, und zwar sollen sie bezeichnet werden:

a. durch große,
b. durch kleine Buchstaben.

§. 22.

Größe der Winkel.

1. Ein Winkel ist so groß als ein anderer, oder 2 Winkel sind einander gleich, wenn die Schenkel beider Winkel dieselbe oder die gleiche Neigung zu einander haben.

2. Ein Winkel ist größer als ein anderer, wenn seine Schenkel eine geringere Neigung zu einander haben, d. h. weiter auseinander stehen als die andern, und umgekehrt; so ist z. B. (Fig. 54.) ∠ ABC größer als ∠ ABD und dieser wieder größer als ∠ ABE.

3. Die Größe eines Winkels hängt also von der geringern oder größern Neigung seiner Schenkel zu einander ab. Daraus folgt:

a. Ein Winkel wird größer, wenn seine Schenkel sich entfernen (aus einander gehen), und kleiner, wenn sie sich nähern (näher zusammen kommen).

b. Die Größe eines Winkels hängt durchaus nicht ab von der Länge der Schenkel, denn diese trägt zum Nähern oder Auseinandergehen der Schenkel eines Winkels nichts bei. Ein Winkel wird also durch die Verlängerung oder Verkürzung seiner Schenkel weder größer noch kleiner: so ist z. B. (Fig. 56.) ∠ CAD = ∠ FAG = ∠ BAE.

c. Da, wenn man die Schenkel verlängert, diese verlängerten Schenkel auch einen größern Raum fassen als die ursprünglichen Schenkel, der Winkel aber deßhalb nicht größer geworden ist, so kann demnach auch ein Winkel nicht der Raum sein, den 2 zusammentreffende Linien mit einander bilden.

d. Es können demnach 2 Winkel gleich sein und doch ungleiche Schenkel haben; es können aber auch 2 Winkel ungleich sein mit gleichen Schenkeln.

4. Da bei gleichen Winkeln ihre Schenkel gleiche Neigung haben, so werden auch, wenn man die Spitzen solcher Winkel, ebenso einen Schenkel des einen Winkels auf den des andern legt, auch die beiden andern Schenkel, folglich die Winkel selbst auf einander fallen, also einander decken. Man kann demnach sagen: **Gleiche Winkel decken einander, und Winkel, die einander decken, sind gleich.**

5. Es soll ein Winkel gezeichnet werden, der einem gegebenen Winkel gleich sei.

Erste Auflösung. Man beschreibe von der Spitze des gegebenen Winkels MAN aus (Fig. 57.) mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, der die Schenkel in B und C schneidet; ziehe eine beliebige Linie DE, beschreibe von D aus mit dem vorigen Halbmesser AB oder AC einen Bogen FG, schneide von F aus von FG ein Stück FH=BC ab, ziehe DH, so ist ∠ FDH = ∠ BAC.

Zweite Auflösung. Gegeben sei der Winkel bac (Fig. 58.), schneide von den Schenkeln derselben 2 beliebige Stücke af und ag ab, ziehe eine beliebige Linie de, schneide von ihr ein Stück dh=af ab, beschreibe von d aus mit ag und von h aus mit der Weite fg Bogen, die sich in m schneiden, ziehe durch d und m eine gerade Linie dn, so ist ∠ edn = ∠ bac.

§. 23.
Arten der Winkel.

Bei der Eintheilung der Winkel sieht man entweder
a. auf die Form der Schenkel, oder
b. auf die größere oder kleinere Neigung der Schenkel, also auf die Größe der Winkel, oder
c. auf die gegenseitige Lage zweier Winkel.

1. Sieht man auf die Form der Schenkel, so giebt es:
a. geradlinige Winkel, oder solche Winkel, deren Schenkel gerade Linien sind (Fig. 54.),
b. krummlinige Winkel, deren Schenkel krumme Linien sind (Fig. 59, ∠∠ d, e, f und g),
c. gemischtlinige, bei denen der eine Schenkel eine gerade, der andere eine krumme Linie ist. (Fig. 59, ∠∠ a, b und c).

2. Betrachtet man die Winkel aber in Hinsicht ihrer Größe, so ergiebt sich aus Nachstehendem folgende Eintheilung:

Denken wir uns den kleinsten denkbaren Winkel, lassen dessen Schenkel aber nach und nach immer mehr auseinander gehen, bis sie auf der entgegengesetzten Seite beinahe wieder zusammentreffen, so erhält man alle Winkel von dem kleinsten bis zum größten. Bei diesem Anwachsen oder Größerwerden der Winkel lassen sich hauptsächlich 3 Hauptfälle unterscheiden:
a. von der kleinsten denkbaren Entfernung beider Schenkel bis

dahin, wo sie sich so aus einander neigen, daß sie beinahe eine gerade Linie, aber immer noch eine gebrochene Linie bilden, also (Fig. 60.) vom ∠ BAC nach und nach zum ∠ BAC^{V} übergehen. Alle hier vorkommenden Winkel heißen hohle oder konkave Winkel.

b. Wenn die Schenkel in eine solche Lage gekommen sind, daß sie mit einander eine gerade Linie bilden. In diesem Falle haben sie freilich keine Neigung mehr, bilden also auch, streng genommen, keinen Winkel; allein man kann doch der Analogie wegen ihre gegenseitige Lage als Winkel betrachten, und nennt sie gestreckte oder ebene, auch flache Winkel (Fig. 61.).

c. Wächst ein ebener Winkel noch weiter, d. h. wird er noch größer als ein solcher, so entstehen die erhabenen oder konvexen Winkel; z. B. in Fig. 62. vom ∠ BAC bis zum ∠ BAC^{IV}.

Betrachtet man die hohlen oder konkaven Winkel etwas genauer, so findet man, daß die Schenkel entweder so stehen, daß sich der eine ebenso zum andern neigt wie zur Verlängerung des letztern — solche Winkel heißen rechte Winkel (R), so z. B. Fig. 69. ∠ AEC und ∠ CEB —, oder neigen sich die Schenkel von einander — man nennt dann die Winkel stumpf (Fig. 64, ∠ c.) —, oder endlich zu einander bei spitzen Winkeln (Fig. 64, ∠ d.). Die beiden letzten Arten von Winkeln haben den gemeinschaftlichen Namen schiefe Winkel, weil bei ihnen immer ein Schenkel eine schiefe Richtung gegen den andern hat.

Zeichnet man 2 rechte Winkel so an einander, daß ein Schenkel gemeinschaftlich ist, so werden die beiden andern eine gerade Linie bilden, woraus ersichtlich ist, daß ein ebener Winkel genau so groß ist als 2 rechte Winkel, ein hohler aber $<$ 2 rechte Winkel und ein erhabener $>$ 2 R ist.

Wir hätten also in Rücksicht auf die Größe der Winkel folgende Winkelarten:

a. hohle oder konkave Winkel, > 0 und < 2 R, und zwar
   a. rechte, $=$ R,
   b. schiefe, nämlich
      aa) spitze, $<$ R,
      bb) stumpfe, $>$ R;

b. ebene, oder gestreckte, oder flache Winkel $= 2$ R;

c. erhabene oder konvexe Winkel, > 2 R und < 4 R.

3. Bisher betrachtete man jeden Winkel einzeln für sich: nun kommt es aber auch vor, daß man 2 Winkel mit einander vergleicht, indem man sieht, welche Lage sie gegen einander haben.

Sieht man nun auf die gegenseitige Lage je zweier Winkel, so kann es folgende Fälle geben:

a. Zwei Winkel mit gemeinschaftlicher Spitze (Scheitel), und zwar:

α. neben einander liegend, d. h. mit gemeinschaftlichem Schenkel, wobei es vorkommen kann, daß

aa) die beiden äußern (nicht gemeinschaftlichen) Schenkel eine gebrochene Linie bilden — man nennt solche Winkel benachbarte Winkel, wie z. B. in Fig. 63. ∠ a und ∠ b —,

bb) die beiden äußern Schenkel eine gerade Linie bilden: solche Winkel heißen Nebenwinkel, wie z. B. in Fig. 64. ∠ c und ∠ d;

β. gegenüber liegend, indem die Schenkel des einen Verlängerungen der Schenkel des andern Winkels sind; man heißt solche Winkel Scheitelwinkel, wie in Fig. 65. die Winkel a und g, oder h und b, oder c und e, oder f und d.

b. 2 Winkel, deren Scheitel oder Spitzen nicht gemeinschaftlich sind, aber auf einer und derselben Linie, welche 2 andere parallele Linien durchschneidet, so liegen, daß je einer an einer Parallele ist. Nun kann es vorkommen:

α. daß beide Winkel auf derselben Seite jener durchschneidenden Linie liegen; man nennt sie Gegenwinkel, und zwar gibt es, je nachdem sie inner- oder außerhalb der beiden parallelen Linien sind,

aa) innere, wie z. B. b und c, oder g und f (Fig. 65.);

bb) äußere, wie z. B. a und d, oder h und e;

cc) gemischte (correspondirende Winkel), d. i. innere und äußere Gegenwinkel, wie z. B. a und c, b und d, h und f, g und e;

β. daß der eine der 2 Winkel auf der einen, der andere auf der andern Seite der durchschneidenden Linie liegt; dieß sind Wechselwinkel, und hier gibt es wieder (Fig. 65.):

aa) innere, wie z. B. b und f, c und g,

bb) äußere, wie z. B. a und e, h und d,

cc) gemischte, wie z. B. a und f, h und c, d und g, e und b.

Bemerkungen zu der Eintheilung der Winkel:

1. Der möglichst größte aller Winkel ist der, welcher durch die ganze Umdrehung einer Linie um einen ihrer Endpunkte beschrieben wird. Dabei kommen beide Linien wieder in ihre ursprüngliche Lage, d. h. sie liegen wieder über einander. Da nun hier aber kein Richtungs-Unterschied mehr Statt findet, so ist in diesem Falle auch kein Winkel mehr vorhanden und die ganze Umdrehung giebt nur die Grenze der Größe aller Winkel an. Es zeigt dieß zugleich, daß die Größe der Winkel begrenzt ist. Die beiden Zustände, der, worin noch kein Winkel beschrieben ist, und der, worin alle möglichen Richtungsänderungen vollendet sind, fallen zusammen.

2. Jedes der unter Nro. 3 vorkommenden Winkelpaare kann jede beliebige Lage haben.

3. Nebenwinkel und benachbarte Winkel brauchen nicht immer nur je 2 zu sein, es können auch mehrere neben einander liegen, wenn nur die 2 zunächst liegenden je einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und die äußersten Schenkel bei den Nebenwinkeln eine gerade und bei den benachbarten Winkeln eine gebrochene Linie bilden; so sind in Fig. 66. die Winkel a, b, c, d und e Nebenwinkel, weil die äußersten Schenkel AB und BC in gerader Linie liegen, dagegen sind die Winkel a, b, c und d keine Nebenwinkel, weil ihre äußersten Schenkel AB und CD eine gebrochene Linie bilden.

4. Suchet in Fig. 67. auf:

a. wie viele Paare Neben-, Scheitel-, Gegen- und Wechselwinkel, eben so wie viele Paare benachbarte Winkel vorkommen;

b. die verschiedenen Arten von Gegen- und Wechselwinkeln.

§. 24.

Der rechte Winkel.

1. Der rechte Winkel hat immer dieselbe (eine konstante) Größe; daher sind alle rechte Winkel einander gleich.

2. Da Winkel nur durch Winkel gemessen werden können, aber nur der rechte Winkel eine konstante Größe hat, so wird er als das Maß der Winkel überhaupt angenommen, d. h. alle Winkel werden durch den rechten Winkel gemessen. Ist z. B. ein Winkel nur halb so groß als ein rechter Winkel, so sagt man, er ist ein Halbrechter, oder er ist $=\frac{R}{2}$. Ein Winkel, dessen Größe den 4ten Theil eines R beträgt, heißt ein Viertelrechter, ist also $=\frac{R}{4}$ u. s. w.

3. Um aber Winkel genau messen zu können, welche theils kleiner, theils größer sind als R, so theilt man letztern in 90 gleiche Theile, welche man Grade nennt; jeden Grad theilt man wieder in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden.

Die Zeichen für die Winkeltheile sind: °, ′, ″, so daß ersteres Grade, das zweite Minuten und das letzte Sekunden bedeutet; so wäre also 5° 34′ 54″ so viel als 5 Grade, 34 Minuten und 54 Sekunden.

4. Wie viel Grade, Minuten und Sekunden kann demnach ein spitzer und ein stumpfer Winkel höchstens haben?

Ist ein Winkel von 64° 19′ 43″ ein spitzer oder stumpfer Winkel?

Zu welcher Klasse von Winkeln gehört ein Winkel von 114° 25′ 36″, oder von 214° 9′ 18″?

5. Der spitze Winkel ist immer zwischen 0 und R, also zwischen 0° und 90°, der stumpfe Winkel ist immer zwischen R und 2 R, also zwischen 90° und 180°, der ebene Winkel ist immer = 2 R oder 180°, der erhabene Winkel ist immer zwischen 2 R und 4 R, also zwischen 180° und 360°.

6. Da die äußern Schenkel der Nebenwinkel eine gerade Linie bilden, so sind sie gleich einem ebenen Winkel, also = 2 R = 180°; was ist demnach der Nebenwinkel eines R, eines spitzen, eines stumpfen Winkels?

Wie erhält man durch Berechnung den Nebenwinkel eines gegebenen Winkels?

7. Aus Obigem ist klar, daß der Nebenwinkel eines rechten Winkels wieder ein rechter ist; man sagt deßhalb auch umgekehrt: ein rechter Winkel ist ein solcher Winkel, der gleich seinem Nebenwinkel ist.

8. Wie müssen benachbarte Winkel beschaffen sein, die in einem R liegen? Welche Form können die in einen stumpfen, und welche die in einen spitzen Winkel gezeichneten benachbarten Winkel haben?

Lassen sich in die Ecke eines R auch Nebenwinkel zeichnen?

9. Ein Winkel, welcher einen andern zu einem rechten Winkel ergänzt, heißt das Complement desselben; ein Winkel aber, welcher einen andern zu einem ebenen Winkel oder zu 2 R ergänzt, heißt das Supplement; so ist (Fig. 68.) ∠ a das Complement des Winkels b, ∠ m aber ist das Supplement des Winkels n.

Ist ein Winkel $= \frac{R}{2}$, wie groß ist dann sein Complement, und wie groß sein Supplement?

Ein Winkel ist 75° 7′ 4″, wie groß ist sein Complement, und wie groß sein Supplement?

Ist ein Winkel = oder > oder < als R, wie groß ist in jedem dieser drei Fälle das Supplement?

10. Wie man rechte Winkel zeichnet, wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden.

§. 25.

Der Perpendikel.

1. Wird eine Linie so an eine andere gezogen, daß sie mit dieser einen rechten Winkel bildet, so sagt man, die erstere stehe **senkrecht** auf der zweiten. Eine senkrechte Linie ist also eine solche, welche gegen eine zweite eine solche Lage hat, daß sie mit ihr rechte Winkel bildet.

2. Von den einen rechten Winkel bildenden Schenkeln steht immer einer senkrecht auf dem andern.

3. Eine senkrechte Linie wird auch **Perpendikel** genannt; auf jede Linie, sie mag eine Lage haben, welche sie will, läßt sich eine andere Linie perpendikulär (auch lothrecht?) ziehen.

4. Das Zeichen für den Perpendikel ist ⊥.

5. Eine besondere Art senkrechter Linien sind die lothrechten; dieß sind nämlich auf wagrechte Linien gezogene Perpendikel.

6. Jede Linie, die nicht senkrecht auf einer andern steht, also mit dieser keine rechte, sondern schiefe Winkel bildet, heißt **schief** oder **schräg**. Eine schiefe Linie kann rechtsschief und linksschief sein.

7. Wenn von senkrechten oder schiefen Linien die Rede ist, so muß man sich außer dieser noch eine zweite, mit welcher sie in Verbindung kommt, denken.

8. Wenn ein Perpendikel eine wagrechte, lothrechte, linksschiefe oder rechtsschiefe Richtung hat, welche Richtung muß die zweite mit ihm verbundene Linie haben?

9. Suchet im Zimmer, an Gebäuden u. s. w. Perpendikel auf.

10. Soll von einem Punkte einer gegebenen Linie aus eine Senkrechte oder ein Perpendikel gezogen werden, so sagt man: in dem Punkte oder auf der Linie soll ein Perpendikel **errichtet** werden; ist aber ein Punkt außerhalb einer Linie gegeben, und

es soll von diesem Punkte auf die letztere ein Perpendikel gezogen werden, so sagt man: von diesem Punkte auf die Linie einen Perpendikel fällen. Im ersteren Falle geht also der Perpendikel von der Linie aus, im andern wird er auf die Linie gezogen.

11. Anleitung Perpendikel zu errichten:

a. im Mittelpunkt einer gegebenen Linie, und zwar:

α. wenn die Linie nicht zu lang ist;

Auflösung. Man beschreibe (Fig. 69.) von den beiden Endpunkten A und B der Gegebenen AB mit einem Halbmesser, der größer ist als die Hälfte von AB, ober- und unterhalb der Linie Kreuzbogen, die sich in C und D schneiden, ziehe von C nach D hin eine Linie, die die AB in E trifft, so ist CE der verlangte Perpendikel.

b. wenn die Gegebene so lang ist, daß von ihren Endpunkten aus nicht wohl Kreuzbogen beschrieben werden können;

Auflösung. Man schneide von A und B aus (Fig. 70.) zwei gleiche, jedenfalls aber kleinere Stücke als die Hälfte der AB beträgt, nämlich AC und DB ab, beschreibe nun über CD Kreuzbogen, die sich in E und F schneiden, ziehe von E nach F eine Linie, so ist das Stück EG der verlangte Perpendikel.

b. in einem gegebenen Punkte, der aber weder der Mittelpunkt noch einer der Endpunkte ist:

α. der Punkt sei nicht zu nahe an einem der Endpunkte;

Auflösung. Man schneide von dem gegebenen Punkte C (Fig. 71.) aus die beiden beliebigen aber gleichen Stücke CD und CE ab, beschreibe dann über ED Kreuzbogen, die sich in F schneiden, ziehe FC, so ist dieß der verlangte Perpendikel;

b. der gegebene Punkt sei nahe bei einem der Endpunkte.

Auflösung. Von dem gegebenen Punkte C (Fig. 72.) aus beschreibe mit beliebigem Halbmesser einen Bogen DE, schneide mit demselben Halbmesser von diesem Bogen zwei gleiche Stücke DF und FG ab, beschreibe mit gleichen Halbmessern von F und G aus Kreuzbogen, die sich in H schneiden, ziehe HC, so ist dieß der verlangte Perpendikel.

c. in einem der Endpunkte.

1te Auflösung. Verlängere (Fig. 73.) die Linie AB beliebig nach C und verfahre wie bei Nr. b. α.

2te Auflösung. Lege an AB (Fig. 74.) in B unter einem beliebigen spitzen Winkel eine beliebig lange Linie BC an, beschreibe dann von C aus mit CB einen Kreis, der die AB in D schneidet,

ziehe durch D und C die Linie DE, verbinde den Punkt E und B durch die Gerade EB, so ist dieß der verlangte Perpendikel.

3te Auflösung. Beschreibe von B aus (Fig. 75.) mit beliebigem Halbmesser einen Bogen CF, schneide von ihm mit der gleichen Zirkelöffnung ein Stück CD ab, von D aus beschreibe wieder mit demselben Halbmesser einen Bogen GH, ziehe durch C und D eine gerade Linie, bis sie den Bogen in E trifft, und ziehe EB, so ist dieß der verlangte Perpendikel.

4te Auflösung. Man schneide (Fig. 76.) von dem bestimmten Endpunkte B aus von der AB 5 beliebige aber gleiche Stücke ab; beschreibe aus dem dritten Theilungspunkte (von B an gezählt) mit der Weite von 5 Theilen und von B aus mit 4 Theilen Bogen, die sich in C schneiden, ziehe CB, so hat man den zu suchenden Perpendikel.

Anm. Als Probe eines genauen Verfahrens im Errichten von Perpendikeln diene Folgendes: Man lasse zwei Punkte A und B (Fig. 77.) und über denselben einen dritten Punkt C zeichnen, lasse diese Punkte durch die geraden Linien AB, BC und AC verbinden; errichtet man nun in den Halbirungspunkten derselben, also in D, F und E Perpendikel, so müssen sich diese in einem Punkte G schneiden.

Will man den Schüler recht im Perpendikel-Errichten üben, so lasse man ihn die Fig. 78, welche man auch noch erweitern kann, ausführen. Er ziehe eine wagrechte Linie AB, errichte (aber ohne Benützung des hölzernen Winkels) auf ihr in A und B die der AB gleichen Perpendikel AD und BC, auf diesen wieder die gleichen Perpendikel DE und CF, und so fahre man fort, bis sich die Figur wieder mit dem Perpendikel ML schließt. Ist diese genau der AB gleich, so ist dieß ein Beweis, daß der Schüler im Errichten von Perpendikeln gut bewandert ist.

12. Anleitung Perpendikel zu fällen:

a. wenn der gegebene Punkt C (Fig. 79.), von welchem aus der Perpendikel gefällt werden soll, nicht über einem der Endpunkte der AB steht;

Auflösung. Man beschreibe von dem gegebenen Punkte C aus mit einem Halbmesser, der größer ist als die Entfernung des Punktes C von AB, einen Bogen, der die AB in D und E schneidet, von diesen Durchschnittspunkten aus beschreibe mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Kreuzbogen, die sich in F schneiden, ziehe von C in der Richtung nach F eine Linie, bis sie die AB in G trifft, so steht CG senkrecht auf AB.

b. wenn der gegebene Punkt C über einem der Endpunkte oder nicht weit von dessen Richtung liegt;

1te Auflösung. Man verlängere die AB beliebig nach D und verfahre auf die zuletzt angegebene Weise, wie Fig. 80. zeigt.

2te Auflösung. Man ziehe (Fig. 81.) von C aus unter beliebigem spitzen Winkel an AB eine Linie CD, beschreibe vom Halbirungspunkte E derselben aus mit EC oder ED als Halbmesser eine Kreislinie, welche AB in F schneidet, ziehe CF, so hat man den verlangten Perpendikel.

c. wenn der Punkt eine solche Lage hat, daß der Perpendikel über die gegebene Linie AB hinaus, also auf die Verlängerung derselben fällt.

1te Auflösung. Man verlängere die AB beliebig, und verfahre wie früher (Fig. 82.).

2te Auflösung. Man ziehe (Fig. 83.) von C auf AB zwei beliebige schiefe Linien CD und CE, beschreibe von D aus mit DC und von E aus mit EC Bogen, die in C zusammentreffen und sich in F schneiden; ziehe nun von C nach F eine Gerade, so wird diese die Verlängerung von AB in G senkrecht treffen.

Anm. Will man sich überzeugen, ob der Schüler das Fällen von Perpendikeln genau eingeübt hat, so lasse man ihn wieder wie früher zwei Punkte A und B (Fig. 85.) und über diese einen dritten Punkt C zeichnen, lasse diese Punkte durch drei gerade Linien AB, BC und AC verbinden und von jedem Punkte aus auf die gegenüberliegende Linie einen Perpendikel fällen, so müssen sich diese drei Senkrechten in einem Punkte G schneiden.

13. Soll über einer gegebenen Linie AB (Fig. 84.) ein rechter Winkel construirt werden, so beschreibt man von der Mitte der AB aus mit der Hälfte dieser Linie einen Halbkreis, nimmt auf ihm einen beliebigen Punkt, z. B. D an, und zieht von ihm an A und B gerade Linien, so bilden diese einen rechten Winkel. Die Aufgabe wird ebenfalls gelöst, wenn man auf dem Halbkreise statt D jeden beliebigen Punkt, z. B. E oder F, annehmen würde.

§. 26.

Die vier Rechnungsarten mit Winkeln, oder Veränderungen, welche mit den Winkeln in Beziehung auf ihre Größe vorgenommen werden können.

a. Addition.

1. Wenn ein Winkel so groß ist als zwei oder mehrere andere Winkel, so sagt man, er ist gleich der Summe der letztern; demnach ist (Fig. 86.) $\angle$ BAC = der Summe der Winkel $\angle a + \angle b + \angle c$.

2. Wenn ein $\angle$ 75°, ein anderer 20° enthält, wie groß ist ihre Summe?

Ein Winkel messe 104° 5′ 2″, ein zweiter 24° 9′ 5″, wie groß muß ihre Summe sein?

Wie groß muß ein Winkel sein, der gleich der Summe dreier Winkel sein soll, von denen der erste 4° 7′ 5″, der zweite 7° 5′ 8″, der dritte 1° 4′ 5″ groß ist?

Vier Winkel sollen addirt werden, wovon der erste 4° 5′ 9″, der zweite 10° 5″, der dritte 8° 6′ 6″ und der vierte 16° 9′ 7″ mißt; wie groß ist ihre Summe?

3. Soll ein Winkel gezeichnet werden, der gleich der Summe zweier oder mehrerer Winkel sei, so können zwei Fälle stattfinden:

a. entweder werden die übrigen Winkel an den ersten gezeichnet, welches dadurch geschieht, daß man von der Spitze A des 1ten gegebenen Winkels a aus (Fig. 87.) mit beliebigem Halbmesser einen Bogen BF, und mit demselben Halbmesser von der Spitze der andern Winkel aus ebenso Bogen beschreibt, welche die Schenkel in H und J, ebenso in M und L treffen, auf den Bogen DF die beiden Bogenstücke aufträgt, so daß DE = HJ und EC = ML sei, endlich AC zieht, so ist $\angle$ BAC = $\angle$ a + $\angle$ b + $\angle$ c; denn $\angle$ a = $\angle$ a, $\angle$ b′ = $\angle$ b und $\angle$ c′ = $\angle$ c;

b. oder wird ein neuer Winkel gezeichnet, welcher gleich der Summe der gegebenen Winkel ist.

Dieß geschieht auf die obige Art, nur daß man zuerst einen Winkel zeichnen muß, welcher gleich dem 1sten der gegebenen Winkel ist, und an diesen dann die übrigen, wie oben gezeigt wurde, anlegt.

b. Subtraction.

1. Wenn 2 Winkel zusammen so groß sind als ein einziger, so ist der eine der beiden ersten Winkel die Differenz zwischen dem andern und dem Summenwinkel; wenn also $\angle$ a + $\angle$ b = $\angle$ c ist, so ist $\angle$ a die Differenz zwischen $\angle$ c und $\angle$ b, oder $\angle$ b ist die Differenz zwischen $\angle$ c und $\angle$ a.

2. Man kann aber auch obigen Winkel c nicht als Summenwinkel, sondern als einzelnen Winkel BAC betrachten (Fig. 88.); schneidet man nun von ihm ein Stück BAD ab, so ist das übrige Stück oder der Winkel DAC die Ergänzung zu dem Winkel BAC, oder $\angle$ DAC ist die Differenz zwischen dem Winkel BAC und BAD. Denkt man sich aber $\angle$ DAC als Theil von dem $\angle$ BAC, so ist $\angle$ BAD die Differenz zwischen $\angle$ BAC und $\angle$ DAC.

3. Was ist die Differenz zwischen 2 Winkeln, wovon der eine 4° 7′ und der andere 2° 4′ 9″ mißt?

Um was ist ein Winkel von 16° 8′ 9″ kleiner als ein anderer von 45° 9′ 6″?

Von 2 Winkeln mißt der erste 148° 7″, der 2te 97° 7′ 7″; um wie viel ist ersterer größer?

4. Wie wird die Differenz zweier Winkel gezeichnet?

Auflösung. Man beschreibe von der Spitze beider Winkel aus mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Bogen, welche die Schenkel des Winkels BAC (Fig. 89.) in B und C, und die des Winkels EDF in E und F schneiden, trage den kleinern Bogen BC auf den größern EF, so daß Bogen BC = Bogen EG sei, ziehe DG, so ist ∠ GDF die verlangte Differenz.

c. Multiplication.

1. Soll von einem Winkel ein bestimmtes Vielfaches genommen werden, so kann man auch sagen, der Winkel soll multiplicirt werden.

2. Wenn ein ∠ 16° 9′ 7″ mißt, wie groß ist ein anderer, der doppelt so groß ist?

Ein Winkel ist das 4fache eines andern Winkels, der 40° 6′ 7″ mißt; wie groß ist ersterer?

3. Soll ein Winkel gezeichnet werden, der ein Vielfaches von einem andern gegebenen Winkel BAC (Fig. 90.) sein soll, so ziehe eine beliebige Linie DE, beschreibe von der Spitze A aus mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, der in C und B schneidet, und von D aus mit demselben Halbmesser einen Bogen FH, trage auf diesen den Bogen CB so oft das Sovielfache der neue Winkel von dem gegebenen Winkel werden soll, hier z. B. 5mal, ziehe GD, so ist ∠ GDF das 5fache des Winkels BAC.

d. Division.

1. Der Winkel läßt sich theilen; er wird aber nicht wie die Linie durch einen Punkt getheilt, sondern durch eine Linie, welche entweder von außen in den Scheitel oder von demselben aus gezogen und Theilungslinie genannt wird.

2. Die Theile, welche durch die Theilung entstehen, werden dadurch, daß sie auch Schenkel und Scheitel haben, selbst wieder Winkel.

3. Die Theilungslinie ist ein Schenkel und zwar ein gemeinschaftlicher, da er 2 Winkeln zugleich angehört.

4. Soll ein Winkel in 2 Theile getheilt werden, so braucht man eine Theilungslinie, soll er in 3 Theile getheilt werden, so sind 2 Theilungslinien nöthig, bei 4 Theilen 3 Linien, bei 5 Theilen 4 Linien u. s. w.

5. Die Winkel können in gleiche und in ungleiche Theile getheilt werden; wird ein Winkel in gleiche Theile getheilt, so kann man auch sagen, der Winkel wird dividirt.

6. Theilt man einen Winkel in 2 gleiche Theile, oder halbirt man ihn, so ist ein solcher Theil die Hälfte des ganzen Winkels; 2 solcher Hälften geben den ganzen Winkel wieder.

Theilt man einen Winkel in 3 gleiche Theile, so ist ein solcher Theil der 3te Theil oder ein 3tel des ganzen Winkels u. s. f.

7. Die Summe zweier gleich großer Winkel ist 75° 9′ 8″; wie groß ist jeder?

Wenn ein Winkel, der 111° 7′ 6″ mißt, in 3 gleiche Theile getheilt wird, wie groß ist jeder Theil?

Das 4fache eines Winkels ist 150° 9′ 2″; wie groß ist der Winkel selbst?

Wie viel Grade, Minuten u. s. w. hat ein $\frac{2}{3}$ R, $\frac{3}{4}$ R, $\frac{7}{8}$ R?

8. Wie werden Winkel auf dem Papier in gleiche Theile getheilt?

a. Jeder beliebige Winkel in 2 gleiche Theile.

1ste Auflösung. Beschreibe von der Spitze des gegebenen Winkels BAC (Fig. 91.) aus mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel in D und E schneidet, von diesen Durchschnittspunkten aus beschreibe wieder mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Bogen, die sich in F schneiden, verbinde diesen Punkt mit der Spitze des Winkels durch die gerade Linie FA, so halbirt diese den Winkel BAC.

2te Auflösung. Ziehe von einem beliebigen Punkte D (Fig. 92.) eines Schenkels des gegebenen Winkels BAC aus mit dem andern Schenkel AB eine Parallele DE, schneide von derselben ein Stück DF ab = DA, verbinde die Spitze A mit dem Punkte F, so halbirt AF den gegebenen Winkel.

3te Auflösung. Beschreibe aus der Spitze A des gegebenen Winkels BAC (Fig. 93.) 2 beliebige aber ungleiche Bogen DE und FG, verbinde die entgegengesetzten Endpunkte derselben durch die geraden Linien DG und EF, ziehe von dem Durchschnittspunkte H an den Scheitel des Winkels die Gerade HA, so theilt diese den gegebenen Winkel in 2 gleiche Theile.

Soll aber ein Winkel besonders gezeichnet werden, der gleich der

Hälfte eines gegebenen Winkels BAC (Fig. 94.) sei, so verlängere man einen der Schenkel desselben rückwärts beliebig, hier den Schenkel BA nach F, beschreibe von der Spitze A aus einen beliebigen Kreisbogen, der den andern Schenkel in D und die Verlängerung in E schneidet, ziehe DE, so ist ∠ AED = $^1/_2$ BAC.

Soll man aber eine Halbirungslinie ziehen, wenn die Schenkel des zu halbirenden Winkels sich nicht mehr auf der Zeichnungsfläche schneiden, so verfahre man auf folgende Art:

Auflösung. Man errichte in einem beliebigen Punkte E (Fig. 95.) des einen Schenkels AB und in F auf dem andern Schenkel CD Perpendikel, schneide von beiden gleiche Stücke EG und FH ab, ziehe durch G die MN parallel AB und durch H die OP parallel CD, so werden diese mit einander einen Winkel bilden, dessen Spitze R und welcher dem gegebenen, auf dem Papier nicht vollständig gezeichneten Winkel gleich sein wird; halbire nun auf eine der oben angegeben Arten den Winkel ORM, so wird dessen Halbirungslinie gehörig verlängert auch zugleich den gegebenen Winkel halbiren.

b. Jeder beliebige Winkel in 4, 8, 16, 32 u. s. w. gleiche Theile.

Auflösung. Man theile den gegebenen Winkel zuerst nach einer der oben angegebenen Anleitung in 2 gleiche Theile, jede Hälfte betrachte man wieder als eigenen Winkel und halbire denselben, so wird ein Theil der 4te Theil des gegebenen Winkels sein; jedes Viertel theile man wieder in 2 gleiche Theile, so erhält man 8tel; jedes 8tel wieder halbirt giebt 16tel u. s. f.

c. Der rechte Winkel in 3 gleiche Theile.

Auflösung. Man beschreibe von der Spitze des gegebenen Winkels BAC aus (Fig. 96.) mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, der die Schenkel in D und E schneidet, beschreibe mit demselben Halmesser von D und E aus Bogen, die in F und G schneiden, ziehe FA und GA, so wird durch diese Linien der rechte Winkel in 3 gleiche Theile getheilt.

d. Der rechte Winkel in 6, 12, 24 u. s. w. gleiche Theile.

Auflösung. Zuerst theile man den rechten Winkel nach Nr. c. in 3, nach Nr. a. jeden Theil wieder in 2, 4, 8 u. s. w. gleiche Theile.

9. Winkel von gegebener Größe zu zeichnen.

a. einen Winkel von 60°.

Auflösung. Man ziehe eine beliebige Linie ab (Fig. 98.),

beschreibe von a und b aus mit ab als Halbmesser Kreuzbogen, die sich in c schneiden, ziehe ac, so ist $\angle$ bac = 60°.

b. Winkel von 30°, 15°, 45°; ferner Winkel von $7\frac{1}{2}°$, $22\frac{1}{2}°$, $37\frac{1}{2}°$ und $52\frac{1}{2}°$.

Auflösung. Man ziehe (Fig. 97.) eine gerade Linie ab, beschreibe aus a mit beliebigem Halbmesser einen Bogen ce, schneide von ihm von c aus mit demselben Halbmesser ein Stück cd ab, ziehe ad, so ist $\angle$ cad = 60°; halbirt man denselben durch die Linie af, so ist $\angle$ baf oder $\angle$ fad = 30°, halbirt man wieder dieselben durch die Linien ag und ak und die nun erhaltenen Theilwinkel wieder durch die Linien ai, ah, al und am, so ist $\angle$ bai = $7\frac{1}{2}°$, $\angle$ bag = 15°, $\angle$ bah = 15° + $7\frac{1}{2}°$ = $22\frac{1}{2}°$, $\angle$ bal = 30° + $7\frac{1}{2}°$ = $37\frac{1}{2}°$, $\angle$ bak = 30° + 15° = 45° und $\angle$ bam = 45° + $7\frac{1}{2}°$ = $52\frac{1}{2}°$.

c. Winkel von 105°, 135°, 150°; 75°.

Man zeichne einen Winkel von 15° und addire ihn zu einem rechten Winkel, so hat man einen Winkel von 105°; addirt man einen Winkel von 45°, so hat man einen Winkel von 135°, und einen Winkel von 150°, wenn man zu R einem Winkel von 60° addirt.

Zieht man dagegen einen Winkel von 15° von 90° ab, so hat man einen Winkel von 75°.

§. 27.

Höchste Anzahl der Winkel, welche durch den Durchschnitt gerader Linien entstehen.

1. Die Linien sollen sich alle in einem (demselben) Punkte schneiden.

Mit 2 gerad. Lin. können dann höchst. 4 Winkel gebild. werden,
" 3 " " " " " 6 " " "
" 4 " " " " " 8 " " "
" 5 " " " " " 10 " " "

also überhaupt doppelt so viele Winkel, als Linien durch denselben Punkt gezogen werden.

2. Die Linien schneiden sich in der höchsten Anzahl von Punkten.

a. Nach dem früher Gesagten (§. 16.) findet man die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte gerader Linien, wenn man die Anzahl der Linien mit der um 1 verminderten Zahl multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.

b. Nach §. 27, 1. können um den Durchschnittspunkt zweier Linien höchstens 4 Winkel sein.

c. Man erhält also die höchste Anzahl der Winkel, welche durch den Durchschnitt einer bestimmten Anzahl gerader Linien entstehen können, wenn man die Anzahl der geraden Linien mit der um 1 kleinern Zahl multiplicirt, das Produkt durch 2 dividirt und den Quotienten wieder mit 4 multiplicirt, oder kurz: **wenn man die Anzahl der Linien mit der um 1 kleinern Zahl multiplicirt und dieses Produkt doppelt nimmt.**

2 gerade L. bild. höchst. 1 Durchschnpkt., also höchst. $1.4 = 4$ Winkel,

3 " " " " $\frac{3.2}{2} = 3$ " " " $3.4 = 12$ "

4 " " " " $\frac{4.3}{2} = 6$ " " " $6.4 = 24$ "

5 " " " " $\frac{5.4}{2} = 10$ " " " $10.4 = 40$ "

7 gerade Linien bilden also höchstens $\frac{7.6}{2} . 4 = 7.6.2 = 84$ "

11 " " " " " $\frac{11.10}{2} . 4 = 11.10.2 = 220$ " .

Anmerkung. Betrachtet man die hier aufgefundene höchste Anzahl der Winkel der Reihe nach, nämlich 4, 12, 24, 40, 60, 84, 112 u. s. w. und sucht die Unterschiede je zweier auf einander folgenden Glieder dieser Zahlenreihe, also 8, 12, 16, 20, 24, 28 u. s. w., so findet man, daß der Unterschied dieser letztern Reihe eine konstante Zahl, nämlich 4 ist.

§. 28.

Aufgaben zum Zeichnen

a. über den Perpendikel:

1. In dem Mittelpunkte einer geraden Linie soll ein Perpendikel errichtet werden.
2. In einem Punkte einer Geraden, welcher zwar nicht Mittelpunkt aber doch ziemlich entfernt von einem der Endpunkte ist, soll ein Perpendikel errichtet werden.
3. Man soll auf einer Linie in einem Punkte, welcher in der Nähe einer der Endpunkte ist, einen Perpendikel errichten.
4. In einem Endpunkte einer gegebenen geraden Linie soll ein Perpendikel errichtet werden.
5. Von einem Punkte über und unter einer Geraden soll auf diese eine Senkrechte gefällt werden.
6. Von einem Punkte, der beinahe über einem der Endpunkte einer geraden Linie ist, soll auf diese ein Perpendikel gefällt werden.
7. Ueber einer gegebenen geraden Linie liegt ein Punkt so, daß

ein von ihm auf jene gefällter Perpendikel nur auf die Verlängerung der Linie fällt, man soll den Perpendikel fällen.

8. Es sollen 2 gleiche Linien gezeichnet werden, welche einander in ihren Mittelpunkten senkrecht durchschneiden.

9. Man soll eine Linie zeichnen, welche eine andere gegebene Linie in einem bestimmten Punkte senkrecht durchschneidet.

10. Auf den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie sollen 2 gleiche Perpendikel errichtet werden.

11. Auf einer gegebenen geraden Linie sollen mehrere Perpendikel errichtet werden, welche nicht nur einander gleich sind, sondern auch gleiche Entfernung von einander haben.

12. Theilet eine gegebene gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, errichtet sowohl in den End- als Theilungspunkten Perpendikel so, daß jedesmal der nächstfolgende auf der entgegengesetzten Seite ist.

b. über den rechten Winkel.

13. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen geraden Linie sollen 2 rechte (gleiche) Nebenwinkel gezeichnet werden.

14. Es sollen in verschiedenen Lagen gleichschenklige rechte Winkel gezeichnet werden.

15. Man soll rechte Winkel zeichnen, deren einer Schenkel ein bestimmtes Vielfaches, z. B. das Dreifache u. s. w. des andern sei.

16. Es sollen rechte Winkel gezeichnet werden, deren einer Schenkel der Lage nach gegeben ist.

17. Man soll einen rechten Winkel zeichnen, der dieselbe Lage habe, wie ein anderer gegebener rechter Winkel, d. h. dessen Schenkel mit dem des letztern parallel laufen.

18. Ueber einer gegebenen geraden Linie sollen beliebig viel rechte Winkel construirt werden.

c. Anlegen von gleichen Winkeln.

19. Es sei ein spitzer Winkel gegeben, es soll ein 2ter ihm gleicher gezeichnet werden, und zwar
   a) in willkührlicher Lage,
   b) in gleicher Lage.

20) Man soll einen stumpfen Winkel zeichnen und einen ihm gleichen
   a) in beliebiger Lage,
   b) in gleicher Lage.

21. Zeichnet 2 gleiche in einander liegende Winkel so, daß ihre Schenkel parallel laufen und die Spitzen gleiche Lage haben.

22. Es sollen 2 gleiche nicht in einander liegende Winkel gezeichnet werden, so daß ihre Spitzen eine gleiche Lage haben und ihre Schenkel parallel sind.

23. Man soll 2 gleiche Winkel zeichnen, deren Spitzen einander so entgegengesetzt liegen, daß die des einen Winkels innerhalb der Schenkel des andern liegt, und daß die entsprechenden Schenkel parallel laufen.

24. Dieselbe Uebung, nur daß die Spitze des einen Winkels außerhalb der Schenkel des andern liegt.

d. über die Addition.

25. 2 Winkel sind gegeben, man soll den einen davon so vergrößern, daß der vergrößerte Winkel gleich beiden gegebenen Winkeln sei.

26. Man soll einen Winkel zeichnen, welcher gleich 2 gegebenen Winkeln sei.

27. 3 Winkel seien gegeben, man soll die Summe derselben suchen.

28. Zeichnet einen Winkel, welcher so groß ist als 4 gegebene Winkel.

e. über die Subtraction.

29. 2 ungleiche Winkel seien gegeben, man soll ihre Differenz suchen.

30. Es soll ein Winkel gezeichnet werden, welcher gleich dem Unterschiede zweier gegebenen Winkel sei.

31. Ein spitzer Winkel ist gegeben, man soll seine Ergänzung zu einem rechten Winkel zeichnen.

32. Man soll zu einem gegebenen stumpfen Winkel sein Supplement suchen.

33. 2 Winkel sind gegeben, man soll ihre Ergänzung zu 2 R zeichnen.

f. über die Multiplication.

34. Ein Winkel ist gegeben, man soll 2 andere Winkel zeichnen, von denen der eine doppelt, der andere 3mal so groß ist als der gegebene.

35. Zeichnet 4 Winkel, von denen der nachfolgende immer um den ersten größer ist.

36. Es sollen 4 Winkel gezeichnet werden, von denen der nächstfolgende immer das Doppelte des vorhergehenden sei.

37. Es sind 3 Winkel zu zeichnen, von denen der nächstfolgende immer das 3fache des vorhergehenden sei.

g. über die Division.

38. Ein rechter Winkel soll in 2, ein anderer in 4, ein dritter soll in 8 gleiche Theile getheilt werden.

39. Zeichnet 3 Winkel, von denen der nachfolgende immer die Hälfte des vorhergehenden ist.

40. Ein rechter Winkel soll in 3, 6, 12 gleiche Theile getheilt werden.

41. Es sollen spitze Winkel gezeichnet werden = $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{4}$ R.

42. Man soll 3 spitze Winkel zeichnen = $\frac{2}{3}$ R, $\frac{3}{4}$ R, $\frac{5}{8}$ R.

43. Zeichnet 3 stumpfe Winkel von $\frac{3}{2}$ R, $\frac{4}{3}$ R, $\frac{5}{4}$ R.

44. Die Differenz eines gegebenen Winkels und 2 R soll halbirt werden.

45. Man soll die Hälfte der Differenz zwischen 2 gegebenen Winkeln und 2 R suchen.

46. Zeichnet Winkel von 60^0, 30^0, 15^0, 45^0, dann wieder 4 andere von $7\frac{1}{2}^0$, $22\frac{1}{2}^0$, $37\frac{1}{2}^0$ und $52\frac{1}{2}^0$.

47. Es soll ein Winkel von 105^0, ein anderer von 135^0, ein dritter von 165^0 und ein vierter von 150^0 gezeichnet werden.

48. Bildet schöne Zusammensetzungen
   a) aus rechten Winkeln,
   b) aus schiefen Winkeln.

Dritter Abschnitt.

Die Figur überhaupt.

---

§. 29.

Entstehung und Begriff der Figur.

1. Der Winkel ist, wie früher gezeigt wurde, an dem der Spitze entgegengesetzten Theile unbegrenzt, er ist also eine nur theilweise begrenzte Raumgröße oder Fläche. Begrenzt man nun diesen unbegrenzten Theil dadurch, daß man die beiden Schenkel durch eine oder mehrere Linien verbindet, so erhält man einen geschlossenen oder vollständig begrenzten Raum, oder eine begrenzte Fläche, welche man Figur nennt.

Eine Figur ist also eine nach allen Seiten begrenzte Fläche.

Anm. Eine nach allen Seiten, also nach beiden Ausdehnungen begrenzte Fläche heißt eine vollständig begrenzte Fläche oder eine Figur; ist sie bloß nach einer Seite begrenzt, halbbegrenzte Fläche, nach gar keiner, unbegrenzte Fläche.

2. Eine Figur entsteht also dadurch, daß eine Fläche überall eine Grenze erhält. Da nun die Linie die Grenze der Fläche bildet, so ist jede Figur von Linien begrenzt.

3. Der Begriff „Figur" ist also dem Begriff „Fläche" untergeordnet. Jede Figur ist eine Fläche, aber nicht jede Fläche ist eine Figur, denn es sind:

Flächen

unbegrenzt, begrenzt
(Figuren).

4. Um eine Fläche von allen Seiten begrenzen oder einschließen zu können, braucht man wenigstens entweder eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, oder eine gerade und eine krumme Linie, oder endlich 3 gerade Linien. Man braucht deßhalb wenigstens 3 gerade Linien, weil 2 gerade Linien bloß einen Winkel bilden, welcher bekanntlich auf einer Seite unbegrenzt ist, und um auch diese zu begrenzen, braucht man eine 3te Linie.

Eine Figur kann aber auch von 4, 5, 6 u. s. w. geraden Linien begrenzt sein.

Eine Figur kann also von wie vielen geraden Linien wenigstens eingeschlossen sein, von wie vielen aber höchstens?

5. Die eine Figur einschließenden oder begrenzenden Linien heißen **Seiten**. Man sagt demnach, eine Figur hat 3 Seiten, wenn sie von 3 Linien, 4 Seiten, wenn sie von 4 Linien begrenzt ist u. s. f.

Welche verschiedenen Ausdrücke haben wir demnach für Linien? Wann sagt man Linie, wann Schenkel und wann Seite?

§. 30.

Bestandtheile einer Figur.

1. Man kann bei einer Figur unterscheiden:

a. den **Raum** oder die **Fläche**, d. h. das von den Linien Eingeschlossene,

b. die **Seiten**, d. h. die den Raum einschließenden Linien, und

c. die **Winkel** und **Ecken**.

2. Bemerkungen hierüber:

a. 2 aneinander stoßende Linien bilden einen Winkel; demnach würden in einer Figur nur halb so viel Winkel als Seiten sein: allein da eine Seite mit ihren beiden Endpunkten andere Linien berührt, also 2 Winkel an ihr liegen, so kommen wieder noch einmal so viel Winkel, folglich gerade so viel Winkel als Seiten heraus.

Eine Figur hat also genau so viel Winkel, als sie Seiten hat.

b. Da ein Winkel, von außen betrachtet, eine **Ecke** heißt, so hat eine Figur gerade so viel Ecken als Winkel, folglich **sind auch in einer Figur die Anzahl der Seiten, Winkel und Ecken gleich.**

c. **Innere** Winkel einer Figur sind diejenigen, welche deren

Seiten nach innen mit einander bilden, **äußere Winkel**, welche die Seiten nach außen bilden. Eine besondere Art der letztern sind die **Außenwinkel**; dieß sind nämlich solche Winkel, deren einer Schenkel eine Seite der Figur und der andere die Verlängerung der anliegenden Seite ist. In Figur 99. ist z. B. ∠ c ein innerer Winkel, dagegen sind die Winkel d, a und b äußere Winkel, und unter diesen sind ∠ d und ∠ b Außenwinkel.

d. Ein Außenwinkel entsteht, wenn irgend eine Seite einer Figur verlängert wird; da nun in jeder Ecke 2 Linien zusammentreffen, so können auch durch Verlängerung der Seiten an jeder Ecke 2 Außenwinkel entstehen. **Man erhält demnach die höchste Anzahl der Außenwinkel**, welche an einer Figur möglicherweise vorkommen können, **wenn man die Anzahl der Ecken oder Seiten einer Figur doppelt nimmt.**

Ein Dreieck hat also 2.3 = 6 Außenwinkel,
„ Viereck „ „ 2.4 = 8 „ „
„ Fünfeck „ „ 2.5 = 10 „ „
„ Neuneck „ „ 2.9 = 18 „ „ .

e. Wenn man an einer Ecke beide Seiten verlängert, so bilden diese beiden Verlängerungen mit einander keine Außenwinkel.

f. Suchet in Figur 99. auf:
   a. alle inneren Winkel,
   b. alle Außenwinkel,
   c. diejenigen Winkel, welche zu keiner dieser beiden Klassen gehören.

g. **Ausspringende Winkel** nennt man diejenigen Winkel einer Figur, deren Spitzen nach außen stehen, **einspringende**, deren Spitzen nach innen gekehrt sind, so ist z. B. in Fig. 100. ∠ a ein ausspringender, ∠ b ein einspringender Winkel.

§. 31.

Bezeichnung der Figuren.

1. Da Figuren von Linien begrenzt sind und man zur Bezeichnung einer Linie in der Regel 2 Buchstaben braucht, so hätte man zur Bezeichnung einer Figur gerade doppelt so viel Buchstaben nöthig, als sie von Linien begrenzt ist; weil aber die Endpunkte zweier einander berührenden Linien zusammenfallen, so braucht man

für solche 2 gemeinschaftliche Endpunkte nur einen Buchstaben, welcher auf diese Art natürlich immer an eine Ecke zu stehen kommt. Man kann also sagen, daß man zur Bezeichnung einer Figur immer so viele Buchstaben brauche, als diese Ecken hat.

2. Man benennt nun die Figur, indem man die Buchstaben der Reihe nach sagt, wobei es beliebig ist, mit welchem Buchstaben man anfängt.

3. Da man eine gerade Linie auch manchmal nur mit einem Buchstaben (gewöhnlich aus dem kleinen Alphabete) bezeichnet, der dann in die Mitte derselben gesetzt wird, so bezeichnet man auch eine Figur auf ähnliche Weise, indem man einen Buchstaben in die Mitte jeder Seite setzt.

4. Manchmal wird der Kürze halber eine Figur bloß mit einem Buchstaben (in der Regel aus dem großen Alphabete) bezeichnet, der dann in die Mitte der Figur gesetzt wird (Fig. 101.).

§. 32.

Eintheilung der Figuren.

1. In Rücksicht auf die Richtung der Figuren giebt es:

a. geradflächige Figuren, oder ebene Flächen, oder kurz Ebenen; dieß sind solche Figuren, die in ihren 2fachen Ausdehnungen gerade sind, welche also zwischen ihren Grenzen dieselbe Lage haben, oder welche eine gerade Linie in allen ihren Theilen berühren kann, wie z. B. der Fußboden, der sowohl seiner Länge als Breite nach gerade ist;

b. krummflächige Figuren oder krumme Flächen, die in der einen oder der andern oder in beiden Ausdehnungen krumm sind; und zwar heißen sie

a. einfach gekrümmt, wenn sie in der einen Ausdehnung gerade und in der andern gekrümmt sind, wie z. B. die Oberfläche einer Säule, oder

b. doppelt gekrümmt, wenn sie in ihren 2fachen Ausdehnungen krumm sind, wie z. B. die Oberfläche einer Kugel.

2. In Rücksicht auf die Gestalt der Figuren (Form ihrer Seiten) giebt es:

a. geradlinige, deren Seiten gerade Linien sind,

b. krummlinige, deren Seiten krumm sind,

c. gemischtlinige, welche theils gerade, theils krumme Seiten haben.

3. In Rücksicht auf die Anzahl ihrer Seiten (oder Ecken) theilt man die Figuren ein:
a. in dreiseitige (Dreiecke),
b. in vierseitige (Vierecke),
c. in mehrseitige (Vielecke oder Polygone).

4. In Rücksicht auf die Größe (das gegenseitige Verhältniß) der Seiten giebt es:
a. gleichseitige Figuren, bei welchen alle Seiten einander gleich sind (Fig. 114, 135 und 140.) und
b. ungleichseitige, bei welchen nicht alle Seiten gleich sind (Fig. 117. und 130.).

5. Endlich theilt man sie in Rücksicht auf die Gleichheit der Seiten sowohl als der Winkel ein:
a. in regelmäßige oder reguläre Figuren, welche nicht nur gleiche Seiten, sondern auch gleiche Winkel haben, wie z. B. Fig. 104, 114, 132;
b. in unregelmäßige oder irreguläre Figuren, bei welchen dieß nicht der Fall ist, wie z. B. Fig. 115, 142 und 145.

§. 33.

Von dem Umfange der Figuren.

1. Die Summe aller irgend eine Fläche begrenzenden Linien, oder die Summe aller Seiten einer Figur heißt Umfang oder Perimeter.

2. Man sagt: Figuren haben gleichen Umfang, wenn die Summe der Seiten der ersten Figur gleich der Summe aller Seiten der andern Figur ist.

3. Bei einer gleichseitigen Figur kann man von einer Seite auf den Umfang schließen. Dieser ist nämlich gleich dem Sovielfachen einer Seite, als die Zahl Einheiten hat, welche die Menge der Seiten des Vielecks bezeichnet; bei einem gleichseitigen 4Eck ist also der Umfang das 4fache einer Seite desselben, bei einem 8Eck das 8fache seiner Seite. Oder setzen wir den Umfang = U, eine Seite = s und die Anzahl der Seiten = n, so ist U = ns.

In welchen geradlinigen Figuren ist der Umfang das 3=, 4=, 11fache u. s. w. einer Seite?

4. Umgekehrt kann man bei einer gleichseitigen Figur von ihrem Umfange auf eine Seite derselben schließen, vorausgesetzt, daß die Anzahl der Seiten bekannt sei; bei einem 3Eck ist die Seite

gleich dem 3ten Theil des Umfangs, bei einem 7Eck gleich dem 7ten Theil des Umfangs, überhaupt ist $s = \frac{U}{n}$.

Was für geradlinige Figuren müssen es sein, wenn eine Seite derselben $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ u. s. w. des Umfanges sein soll?

5. Endlich kann man bei einer gleichseitigen Figur, wenn deren Umfang und die Größe einer Seite bekannt sind, auf ihre **Seitenanzahl** schließen; es ist nämlich $n = \frac{U}{s}$.

Wir hätten also folgende 3 Formeln:

$$U = ns,$$

$$s = \frac{U}{n},$$

$$n = \frac{U}{s}.$$

In einem gleichseitigen Dreiecke ist also eine Seite $= \frac{U}{3}$, in einem gleichseitigen Vierecke aber $= \frac{U}{4}$; sind nun in beiden Figuren die Umfänge einander gleich, so verhält sich eine Seite des Dreiecks: einer Seite des Vierecks $= \frac{U}{3} : \frac{U}{4}$ $= \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = 4 : 3$; überhaupt verhält sich die Seite des m Ecks : Seite des n Ecks $= \frac{U}{m} : \frac{U}{n} = \frac{nU}{mn} : \frac{mU}{mn} = \frac{n}{mn} : \frac{m}{mn}$ $= n : m$.

Haben also 2 gleichseitige Figuren gleiche Umfänge, so verhalten sich ihre Seiten zu einander umgekehrt wie ihre Seitenzahl.

7. **Haben aber 2 gleichseitige Figuren gleiche Seiten, so verhalten sich ihre Umfänge wie ihre Seitenzahl**; denn der Umfang des mEcks ist $= mS$, der des nEcks $= nS$, folglich verhält sich der Umfang des m Ecks : Umfang des n Ecks $= mS : nS = m : n$, d. i. wie die Seitenzahl.

8. Wie verhält sich die Seite eines gleichseitigen 4Ecks zu der eines gleichseitigen 6Ecks, wenn der Umfang des letztern 2mal so groß ist als der des erstern?

Umfang des 4Ecks $= U$, also eine Seite $= \frac{U}{4}$

" " 6Ecks $= 2U$, " " " $= \frac{2U}{6} = \frac{U}{3}$;

folglich verhält sich eine Seite des 4Ecks zu einer Seite des 6Ecks $= \frac{U}{4} : \frac{U}{3} = \frac{3U}{12} : \frac{4U}{12} = 3 : 4$.

Die Seite eines 5Ecks sei $2\frac{1}{2}$mal so groß als die eines 8Ecks, wie verhalten sich ihre Umfänge zu einander?

Eine Seite des 8Ecks sei $= S$, so ist der Umfang $= 8S$.

" " " 5Ecks " $= \frac{5S}{2}$, " " " " $= \frac{25S}{2}$;

folglich verhält sich der Umfang des 8Ecks : Umfang des 5Ecks $= 8S : 25 \frac{15S}{2} = \frac{16S}{2} : \frac{25S}{2} = 16 : 25$.

Die Seite eines gleichseitigen 6Ecks sei $3\frac{1}{2}$mal so groß als die eines gleichseitigen 9Ecks, wie verhalten sich ihre Umfänge zu einander?

Umfang des 9Ecks: Umfang des 6Ecks $= 9S : 6.3\frac{1}{3}S = 9S : 20S = 9 : 20$.

9. Aufgaben:

Wenn der Umfang eines gleichseitigen 4Ecks 6° 7′ 5″ ist, wie groß ist eine Seite desselben (decim.)?

Die Seite eines gleichseitigen 7Ecks sei 2′ 7″ (duodecim.), wie groß ist der Umfang?

Die Seite eines gleichseitigen 3Ecks sei 5° 7′ 6″ (decim.) groß, wie groß ist die Seite eines gleichseitigen 5Ecks, das mit dem 3Eck gleichen Umfang hat?

Wenn die Seite eines gleichseitigen 6Ecks 4° 7′ 2″ (decim.) mißt, wie groß ist die Seite eines gleichseitigen 10Ecks, dessen Umfang $2\frac{1}{2}$mal so groß ist?

Ein Garten hat die Form eines 4Ecks, die eine Seite mißt 1° 9″, die 2te 4° 7′ 5″, die 3te 2° 6′ und die 4te 8′ 6″, wie groß ist der Umfang des Gartens (duodecim.)?

Von einem gleichseitigen 7Eck mißt der Umfang 4° 7′ 9″ (duodecim.), wie groß ist eine Seite?

Wenn die Seite eines gleichseitigen 9Ecks 3° 5″ (duodecim.) beträgt, und der Umfang desselben das 3fache des Umfangs eines gleichseitigen 5Ecks ist, wie groß ist letzterer, und wie groß ist eine Seite?

Die Seite eines gleichseitigen 7Ecks sei = 1° 10′ 11″ (duodecim.), wie groß ist die Seite eines gleichseitigen 11Ecks, dessen Umfang sich zu dem des 7Ecks verhält wie 2 : 3?

Umfang des 7Ecks $= 7.323'' = 2261''$; also Umfang des 11Ecks $= \frac{2.2261''}{3}$ und eine Seite des 11Ecks $= \frac{2.2261''}{3.11} = \frac{4522''}{33} = 137^1/_{33}''$ $= 11'\ 5^1/_{33}''$.

§. 34.

Von den Diagonalen.

1. Unter Diagonale (Diagonallinie, Ecklinie, Gehre) versteht man diejenige Linie, welche die Spitze zweier nicht unmittelbar auf einander folgenden Winkel einer Figur verbindet; so sind in Fig. 102. die Linien AE, AD, AC, ferner BF, BE und BD, ebenso CA, CF, CE u. s. w. Diagonalen.

2. Eine von einem innerhalb einer Figur, z. B. in der Mitte gelegenen Punkte G (Fig. 102.) nach einer Winkelspitze gezogene gerade Linie heißt eine Halbdiagonale; so wären z. B. die Linien GA, GB, GC, GD, GE und GF Halbdiagonalen.

3. In einer geradlinigen Figur lassen sich immer so viele Halbdiagonalen ziehen, als die Figur Seiten hat; in einem 3Eck giebt es also 3 Halbdiagonalen, in einem 7Eck sind 7 möglich u. s. w.

4. Wie viel lassen sich aber wirkliche Diagonalen in einer Figur ziehen?

a. Wenn alle Diagonalen von derselben Winkelspitze aus gezogen werden (in welchem Falle sich auch die Diagonalen nicht schneiden);

so viel als die Figur Seiten hat weniger 3; denn an die benachbarten Winkel lassen sich keine Diagonalen ziehen, weil sie sonst mit den Seiten zusammenfallen würden; ebenso fällt der Winkel selbst weg, von dem aus die Diagonalen gezogen werden; es fallen also immer 3 Winkel, mithin auch 3 Diagonalen weg.

Von einem Punkte aus lassen sich also ziehen im

Dreieck	$3 - 3 = 0$	Diagonalen,
Viereck	$4 - 3 = 1$	"
Fünfeck	$5 - 3 = 2$	"
Sechseck	$6 - 3 = 3$	"
Fünfzehneck	$15 - 3 = 12$	"
Vierundzwanzigeck	$24 - 3 = 21$	" .

b. wenn aus allen Ecken Diagonalen gezogen werden.

Man multiplicire die um 3 verminderte Anzahl der Seiten mit der ganzen Anzahl und dividire das Produkt durch 2.

Möglich sind also in einem

Dreieck $= \frac{3\ (3-3)}{2} = \frac{3.0}{2} =$ 0 Diagonalen,

Viereck $= \frac{4\ (4-3)}{2} = \frac{4.1}{2} =$ 2 "

Fünfeck $= \frac{5\ (5-3)}{2} = \frac{5.2}{2} =$ 5 "

Sechseck $= \frac{6\ (6-3)}{2} = \frac{6.3}{2} =$ 9 "

Siebeneck $= \frac{7\ (7-3)}{2} = \frac{7.4}{2} =$ 14 "

Sechzehneck $= \frac{16\ (16-3)}{2} = \frac{16.13}{2} =$ 104 ".

Obige Regel wird aus Folgendem abgeleitet:

Unter 4, a dieses §. wurde gezeigt, daß sich von einem Punkte aus immer so viele Diagonalen ziehen lassen, als die Figur Seiten hat weniger drei. Diese Uebung läßt sich nun von jeder Ecke aus, also überhaupt so oft ausführen, als die Figur Ecke hat. Bei einem 9Ecke z. B. lassen sich von einem Ecke aus 9 — 3, folglich von 9 Ecken aus 9 (9—3) Diagonalen ziehen. Da nun aber jede Diagonale 2mal gezählt wurde, nämlich die von einem Punkte aus, und die in denselben zurück, während dieß doch blos eine und dieselbe Diagonale ist, so muß obige Anzahl 9 (9—3) noch durch 2 dividirt werden, was $\frac{9\ (9-3)}{2}$ oder $\frac{9.6}{2} = 9 . 3$ = 27 Diagonalen gibt.

§. 35.

Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz der Figuren.

1. Wenn ich von einer Figur sage, sie liege neben einer andern, oder über oder unter derselben, so vergleiche ich beide Figuren mit einander in Hinsicht ihrer Lage.

2. Figuren oder Flächen lassen sich aber auch in Hinsicht ihrer Größe mit einander vergleichen.

Unter Größe einer Figur versteht man den Raum, der zwischen den eine ebene Figur einschließenden Seiten begriffen ist. Man sagt statt Größe auch Inhalt oder Flächenraum.

Von Flächen nun, die gleiche Größe, d. i. gleichen

Inhalt haben, sagt man, sie seien **gleichflächig** oder kurz, sie seien **gleich**.

Man bedient sich daher auch des Gleichheitszeichens (=), um anzuzeigen, daß 2 Flächen gleichen Rauminhalt haben, d. i. gleich groß sind. Wenn es z. B. heißt: 3Eck ABC = 3Eck EFG, so will dieß so viel heißen, das 3Eck ABC habe denselben Flächeninhalt wie das 3Eck EFG.

In welchem Falle wird man also von 2 4Ecken sagen können, sie seien einander gleich?

Ein 3Eck kann aber nicht bloß gleichen Inhalt mit einem 3Eck, sondern auch mit einem 4Eck, 5Eck, 6Eck, überhaupt mit jedem Vieleck haben.

Was versteht man aber unter „gleich", wenn man z. B. sagt, daß 2 Personen gleich groß seien?

Die Größe einer Figur hängt natürlich nicht von der Lage derselben ab.

3. Figuren können sich aber nicht bloß durch ihre Lage und Größe, sondern auch noch durch ihre **Form** oder **Gestalt** von einander unterscheiden.

Figuren, welche gleiche Form oder Gestalt haben, nennt man **ähnlich**. Die Aehnlichkeit der Figuren besteht also nicht in der Gleichheit ihrer Größe, sondern in der Gleichheit ihrer Form.

Aehnliche Figuren sind also solche, welche gleiche Form, aber ungleiche Größe haben.

Da es sich bei der Aehnlichkeit um die Gleichheit der Form handelt, so können nicht, wie bei der Gleichheit, verschiedenartige (ungleichnamige) Figuren einander ähnlich sein, sondern nur gleichartige (gleichnamige); so kann z. B. ein 3Eck nur einem 3Eck, ein 6Eck nur einem 6Eck ähnlich sein.

Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∾; 4Eck ABCD ∾ 4Eck EFGH heißt: das 4Eck ABCD ist ähnlich dem 4Eck EFGH.

4. Trifft nun aber beides zusammen, d. h. sind 2 Figuren einander nicht nur gleich, sondern auch ähnlich, so sind sie **congruent**.

Die Congruenz zweier Figuren besteht also sowohl in der Gleichheit der Größe als in der Gleichheit der Form.

Wenn bei congruenten Figuren die einander entsprechenden Stücke auf einander gelegt werden, so decken sich beide Figuren. Man kann also sagen: **Congruente Figuren decken sich, und wenn 2 Figuren sich decken, so sind sie congruent.**

Congruente Figuren unterscheiden sich also bloß durch ihre Lage; denn ist bei der Congruenz zweier Figuren auch Uebereinstimmung der Lage da, so machen beide Figuren ein und dieselbe Figur aus, sind also nicht mehr von einander zu unterscheiden.

Das Zeichen der Gleichheit ist = und das der Aehnlichkeit ∼; man wählte demnach als Zeichen der Congruenz die Verbindung beider, nämlich ≅, z. B. 3Eck ABC ≅ 3Eck EFG, heißt: beide 3Ecke sind congruent.

5. Uebereinstimmung der Form heißt Aehnlichkeit, Uebereinstimmung der Größe Gleichheit und Uebereinstimmung in Form und Größe Congruenz.

6. Anleitung congruente Figuren zu zeichnen.

Da das Zeichnen congruenter 3Ecke und 4Ecke im 4ten und 5ten Abschnitte vorkommt, so soll hier bloß gezeigt werden, wie congruente Vielecke gezeichnet werden.

Gegeben sei z. B. das 5Eck ABCDE (Fig. 103.).

Auflösung. Ziehe eine Linie ab=AB, beschreibe von a aus mit der Weite AC und von b aus mit der Weite BC Bogen, die sich in c schneiden; von c aus beschreibe wieder mit CD und von a aus mit AD (oder auch von b aus mit BD) Bogen, die sich in d schneiden; beschreibe endlich von d und a aus mit DE und AE Bogen, welche sich in e schneiden; verbinde die Punkte b und c, c und d, d und e, e und a durch die geraden Linien bc, cd, de und ea, so ist abcde die verlangte Figur.

7. Wie werden ähnliche Figuren (Vielecke) gezeichnet?

a. Reguläre Vielecke, und zwar

α. mit beliebiger Seite

aa) innerhalb der gegebenen Figur:

1ste Auflösung (bei Figuren mit gerader Seitenzahl). Verbinde (Fig. 104.) 2 gegenüberliegende Ecken durch Diagonalen, nimm auf einer derselben, z. B. auf AE einen beliebigen Punkt a an, schneide das Stück Aa von allen Diagonalen ab, so daß also Aa=Bb=Cc=Dd=Ee=Ff u. s. w. sei, verbinde die Punkte a und b, ebenso die Punkte c und d, e und f u. s. w. durch gerade Linien, so bilden diese ein dem gegebenen ähnliches Vieleck.

2te Auflösung. Man ziehe von jeder Ecke der Figur an die zweitnächstgelegenen Ecken Diagonalen, so werden ihre Durchschnittspunkte die Ecken eines ähnlichen Vielecks, jedoch in veränderter Lage, bilden (Fig. 105.).

bb) außerhalb der gegebenen Figur:

1ste Auflösung (bei Figuren mit gerader Seitenzahl) ähnlich der zweitletzten Auflösung, indem hier aber die Diagonalen verlängert werden müssen (Fig. 104.).

2te Auflösung. Man verlängere sämmtliche Seiten der gegebenen Figur, bis sich je 2 und 2 derselben schneiden, und verbinde diese Durchschnittspunkte durch gerade Linien, so bilden diese ein dem gegebenen Vielecke ähnliches, nur wieder in veränderter Lage (Fig. 106.).

b. mit gegebener Seite

aa) in Verbindung mit der gegebenen Figur,

1) wenn eine Seite der zu zeichnenden Figur kleiner ist als eine Seite der gegebenen Figur;

Auflösung. Man suche den Mittelpunkt der Figur, d. h. einen Punkt, welcher von sämmtlichen Winkelspitzen gleichweit entfernt ist. Man erhält denselben, wenn man in den Halbirungspunkten P und R (Fig. 107.) zweier Seiten AB und AF Perpendikel errichtet; ihr Durchschnittspunkt C giebt jenen Mittelpunkt. Von diesem zieht man an sämmtliche Winkelspitzen die Linien CA, CB, CD, CE und CF, trägt auf eine Seite der Figur, z. B. auf AB ein Stück AG = der Seite der zu zeichnenden Figur, zieht durch den Punkt G mit der gegenüberliegenden Linie AC die Linie GH parallel, welche die CB in H schneidet, schneide von CD, CE, CF und CA die Stücke DJ, EK, FL und AM = BH ab und verbinde die Punkte H und J, J und K, K und L, L und M und M und H durch die geraden Linien HJ, JK, KL, LM und MH, so ist HJKLM die verlangte, der gegebenen ähnliche Figur mit der gegebenen Seite.

2) wenn eine Seite der zu zeichnenden Figur größer ist als die der gegebenen;

Auflösung. Man suche wieder den Mittelpunkt der Figur, ziehe von ihm an sämmtliche Winkelspitzen gerade Linien, verlängere eine Seite der Figur, z. B. AB (Fig. 109.) so, daß die verlängerte Seite AH = der Seite der zu zeichnenden Figur sei, ziehe durch H die HJ parallel der verlängerten CA, bis sie die Verlängerung von CB in J trifft; verlängere die Linien CA, CG, CF, CE, CD, so daß ihre Verlängerungen AO, GN, FM, EL, DK = BJ seien; verbinde die Punkte J, K, L, M, N und O durch die geraden Linien JK, KL, LM, MN und NO, so ist JKLMNO das verlangte Vieleck.

bb) nicht in Verbindung mit der gegebenen Figur;

1ste Auflösung. Lege auf beiden Seiten der Gegebenen Winkel an, die dem gegebenen Vieleck entsprechen, also

beim 5Eck ${}^6/_5$ R = 108^0, beim 6Eck ${}^4/_3$ R = 120^0,
beim 7Eck ${}^{10}/_7$ R = $128\,{}^1/_7{}^0$, beim 8Eck ${}^3/_2$ R = 135^0,
beim 9Eck ${}^{14}/_9$ R = 140^0, beim 10Eck ${}^8/_5$ R = 144^0;

an den andern Endpunkt jedes gleichen Schenkels lege den gleichen Winkel u. s. f.

2te Auflösung. Ziehe von irgend einer Ecke, z. B. von A aus (Fig. 108.) die möglichen Diagonalen, hier also AC und AD; ziehe eine Linie FG = der Seite des zu zeichnenden Vielecks, lege an FG in G den ∠ a' an = ∠ a, mache den Schenkel GH=FG, ziehe FH, lege an letztere in H ∠ b' an = ∠ b, mache wieder den Schenkel HJ = FG = GH; ziehe JF, lege an sie in J ∠ c' an = ∠ c, mache JK = HJ und ziehe KF, so ist FGHJK das verlangte reguläre Vieleck.

b. jedes beliebige unregelmäßige Vieleck.

Auflösung. Gesetzt es sei gegeben das Vieleck ABCDEF (Fig. 110.) und man soll über einer gegebenen geraden Linie MN ein dem vorigen ähnliches Vieleck construiren, so ziehe man wieder von einer beliebigen Ecke, z. B. von A aus die möglichen Diagonalen AC, AD und AE, lege an MN in M ∠ a' = ∠ a und in N ∠ b' = ∠ b an, ihre Schenkel werden sich in O schneiden; lege weiter an MO in M ∠ d' = ∠ d und in O ∠ c' = ∠ c an; der Durchschnitt ihrer Schenkel wird in P sein. Lege nun wieder an MP ∠ f' = ∠ f und ∠ e' = ∠ e an, und so fahre man fort, bis man am Ende die Figur MNOPQR erhalten hat, welche der gegebenen Figur ähnlich sein wird.

Vierter Abschnitt.

Das Dreieck.

---

§. 36.

Entstehung und Begriff des Dreiecks.

1. Ein 3Eck kann man sich auf mehrere Arten entstanden denken:

a. wenn sich 3 gerade Linien in 3 Punkten schneiden (Fig. 111.),

b. wenn man sich in einer Ebene 3 Punkte A, B und C denkt (Fig. 112.), welche nicht in gerader Linie liegen, und wenn man diese Punkte durch gerade Linien AB, BC und AC verbindet,

c. wenn man einen Punkt A (Fig. 112.) in gerader Richtung nach B und von diesem Punkte sich geradlinig, aber in veränderter Richtung, nach C und von da wieder in gerader Linie zurück nach A sich bewegen läßt, endlich

d. wenn man die unbegrenzte Seite eines Winkels CAB (Fig. 112.) noch durch eine dritte Linie BC begrenzt.

2. Ein 3Eck ist also eine von 3 Seiten begrenzte Figur, oder eine solche begrenzte Fläche, welche 3 Seiten hat.

3. Da es keinen begrenzten Raum giebt, der von weniger als 3 Seiten eingeschlossen wäre, so ist mithin das 3Eck die einfachste aller geradlinigen Figuren.

§. 37.

Bestandtheile des Dreiecks.

1. Ein 3Eck besteht aus folgenden Stücken:

a. aus den 3 Seiten,

b. aus 3 Winkeln, und

c. aus dem eingeschlossenen Raume.

2. Jede Seite eines 3Ecks kann als eine einem Winkel gegenüberstehende Seite betrachtet werden, so wie umgekehrt einer jeden Seite ein Winkel gegenüber liegt; so steht z. B. in Fig. 113. dem ∠ a die Seite BC, dem ∠ c die Seite AB und dem ∠ b die Seite AC gegenüber, und umgekehrt.

§. 38.

Bezeichnung der Dreiecke.

1. Ein 3Eck kann auf zweierlei Art bezeichnet werden:
a. entweder setzt man an jede Ecke des 3Ecks einen Buchstaben (§. 31, 1) (Fig. 112.),
b. oder man giebt jeder Seite einen eigenen Buchstaben (gewöhnlich aus dem kleinen Alphabete), der dann aber in die Mitte der Linie gesetzt wird (§. 31, 3).

2. Bei der Bezeichnung der Figuren überhaupt wurde gesagt (§. 31, 2), daß man, um eine Figur zu benennen, immer die Buchstaben der Reihe nach nennen müsse, wobei es willkührlich sei, mit welchem man anfangen wolle. Dieß gilt zwar auch von der Benennung der 3Ecke, allein da hier jeder Buchstabe zunächst den 2 andern Buchstaben liegt, so darf man hier dieselben in willkührlicher Ordnung auf einander folgen lassen; so ist es in obigen Figuren einerlei, ob man sagt 3Eck ABC oder ACB oder BAC oder BCA oder CAB oder CBA.

3. Statt dem Worte „Dreieck" gebraucht man beim Schreiben der Kürze halber das Zeichen △, demnach ist 3Eck ABC und △ ABC gleichbedeutend.

§. 39.

Eintheilung der Dreiecke.

1. Man kann die 3Ecke eintheilen in Rücksicht auf die Gleichheit oder Ungleichheit der Seiten oder in Rücksicht auf die verschiedenen Arten der darin vorkommenden Winkel.

2. Sieht man auf die Seiten, so giebt es:
a. gleichseitige 3Ecke, mit 3 gleichen Seiten (Fig. 114.),
b. gleichschenklige, mit 2 gleichen Seiten (Fig. 115.),
c. ungleichseitige, mit 3 ungleichen Seiten (Fig. (113.).

3. Sieht man bei der Eintheilung auf die Winkel, so giebt es:
a. rechtwinklige △△, mit einem rechten und 2 spitzen Winkeln (Fig. 116.),
b. stumpfwinklige, mit einem stumpfen und 2 spitzen Winkeln (Fig. 117.),
c. spitzwinklige, mit 3 spitzen Winkeln (Fig. 113.).

4. Da in jedem 3Ecke wenigstens 2 spitze Winkel vorkommen, so bestimmt der 3te, ob das 3Eck rechtwinklig, stumpfwinklig oder spitzwinklig ist.

5. Bei den rechtwinkligen und stumpfwinkligen 3Ecken können die rechten und stumpfen Winkel jede beliebige Lage haben.

6. Rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige 3Ecke können zugleich gleichschenklig oder auch ungleichseitig, aber nur das spitzwinklige kann auch gleichseitig sein.

7. Alle gleichseitigen 3Ecke sind zugleich gleichschenklig, aber nicht umgekehrt.

8. In jedem rechtwinkligen 3Ecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse, die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten aber Katheten.

§. 40.

Grundlinie und Höhe des Dreiecks.

1. In einem Dreiecke, wie überhaupt in jeder Figur, nennt man irgend eine Seite, weil man gleichsam auf ihr das Dreieck sich errichtet denkt, die Grundlinie oder Basis. Jede Seite des Dreiecks kann man zur Grundlinie desselben machen; ist aber die Grundlinie nicht besonders bestimmt, so betrachtet man die untere Seite als Grundlinie.

2. Die der Grundlinie gegenüberliegende Winkelspitze heißt die Spitze des 3Ecks. Die Spitze eines 3Ecks richtet sich also immer nach der Grundlinie des letztern.

Es sollen in einem 3Ecke ABC die möglichen Grundlinien und die darauf Bezug habende Spitze des 3Ecks angegeben werden.

3. Nur bei gleichschenkligen und rechtwinkligen 3Ecken ist die Grundlinie und somit auch die Spitze eine bestimmte. Bei dem gleichschenkligen 3Ecke nämlich wird immer die ungleiche Seite, und bei dem rechtwinkligen 3Ecke die Hypotenuse, d. h. die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als Grundlinie betrachtet.

4. Fällt man von der Spitze eines 3Ecks auf die Grundlinie einen Perpendikel, so heißt dieser die Höhe oder die Normale des 3Ecks. Da jede Winkelspitze die Spitze des 3Ecks sein kann, je nachdem man eine Seite als Grundlinie annimmt, so kann ein 3Eck also dreierlei Grundlinien, dreierlei Spitzen und dreierlei Höhen haben.

Anm. Jede von einer Ecke nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite gezogene Gerade nennt man Transversale.

5. Wann kann man wohl von 3Ecken sagen, daß sie gleiche Höhen haben?

6. Bei einem rechtwinkligen 3Ecke wird vorzugsweise der von dem rechten Winkel auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel die Höhe des rechtwinkligen 3Ecks genannt. Die durch dieselbe

von der Hypotenuse abgeschnittenen Stücke heißen die Segmente derselben.

7. Oefters kommt es vor, daß der von der Spitze aus gefällte Perpendikel, oder die Höhe, gar nicht auf die Grundlinie, sondern darüber hinaus, also auf die Verlängerung der Grundlinie fällt. Dieß ist der Fall, wenn man bei einem stumpfwinkligen 3Ecke eine den stumpfen Winkel einschließende Seite als Grundlinie annimmt.

8. Bald fällt die Höhe des 3Ecks in dasselbe, bald über dasselbe hinaus auf die Verlängerung der Grundlinie, bald fällt sie mit einer Seite zusammen:

a. die Höhe fällt in das 3Eck, wenn an der Grundlinie 2 spitze Winkel sind (Fig. 118.),

b. die Höhe fällt außerhalb, wenn an der Grundlinie ein stumpfer Winkel ist (Fig. 119.), und

a. die Höhe fällt mit einer Seite zusammen, wenn an der Grundlinie ein rechter Winkel ist (Fig. 116.).

§. 41.

Umfang des Dreiecks.

1. Unter dem Umfange eines 3Ecks versteht man die Summe seiner 3 Seitenlängen.

2. Da bei einem gleichseitigen 3Ecke alle 3 Seiten gleich sind, so läßt sich der Umfang schon aus einer einzigen Seite finden; er ist nämlich gleich dem 3fachen einer Seite.

3. Umgekehrt kann man bei einem gleichseitigen 3Ecke von seinem Umfange auf eine Seite schließen; diese ist gleich dem 3ten Theile des Umfanges.

4. Aufgaben:

a über das gleichseitige 3Eck:

1) Der Umfang sei $= 7^0\ 8'$ (decimal), wie lang ist jede Seite?

2) Eine Seite sei $= 1'\ 7\frac{1}{2}''$ (duodecimal), wie groß ist der Umfang?

3) $U = 4^0\ 9'\ 5''$ (decimal), wie groß ist S?

4) Es sei $S = 7^0\ 5'\ 2''$ (duodecimal), wie groß wird U sein?

5) Der Umfang sei $= 2'\ 8''$ (duodecimal), wie lang ist eine Seite eines andern gleichseitigen 3Ecks mit $2\frac{1}{4}$mal so langen Seiten?

6) Eine Seite messe $1'\ 5''$ (decimal), wie groß ist der Umfang eines andern gleichseitigen 3Ecks, dessen Seiten $\frac{2}{3}$mal so lang sind?

7) Ein 4Eck habe einen Umfang von $4^0\ 9'\ 5''\ 6'''$ (decimal), ein gleichseitiges 3Eck habe einen halb so großen Umfang, wie groß ist eine seiner Seiten?
8) Die Seite eines regulären 5Es sei $= 1^0\ 2'\ 6''$ (duodecimal), ein gleichseitiges 3Eck habe denselben Umfang wie jenes 5Eck, wie groß ist die Seite des 3Ecks?
9) Die Seite eines gleichseitigen 3Ecks sei $= 5^0\ 7'\ 6''$ (decimal), wie groß ist die eines regulären 8Ecks von gleichem Umfang?
10) Die 1ste Seite eines 4Ecks messe $7'\ 5''$, die 2te $8'\ 6''\ 3'''$, die 3te $1^0\ 5''$ und die 4te $9'\ 7'''$; der Umfang eines gleichseitigen 3Ecks soll sich zu dem eines 4Ecks verhalten wie 5 : 2, wie groß ist die Seite dieses 3Ecks (decimal)?

b. über das **gleichschenklige** 3Eck:

11) Die ungleiche Seite eines gleichschenkligen 3Ecks sei $= 2'\ 8''$ (duodecimal), jede der beiden gleichen Seiten $= 1'\ 10''$, welches ist der Umfang?
12) Der Umfang sei $= 1'\ 4''$ (duodecimal), die ungleiche Seite $5''$, wie lang ist jede der beiden gleichen Seiten?
13) Der Umfang sei $= 1^0\ 8'\ 6''$ (decimal), eine der gleichen Seiten sei $8'\ 4''$, wie groß ist die ungleiche?
14) U sei $= 2'\ 4''$ (duodecimal), jede der beiden gleichen Seiten habe 2 solche Theile, wie die ungleiche 3 hat, wie lang ist jede Seite?
15) Der Umfang sei $= 15'\ 7''$ (duodecimal), die ungleiche Seite $^3/_4$ von einer der gleichen, wie lang ist jede?
16) U sei $= 2^0\ 4'\ 5''$ (decimal) und dabei das 5fache der ungleichen Seite; wie lang ist jede Seite?
17) U $= 10'$ (duodecimal) und die ungleiche Seite um $1'\ 9''$ länger als jede der beiden gleichen, wie lang jede?

c. über das **ungleichseitige** 3Eck:

18) Wie groß ist der Umfang, wenn die eine Seite $1'\ 4''$, die andere $1'\ 7''$ und die dritte $8^1/_2''$ (decimal) mißt?
19) Wie groß ist U, wenn die eine Seite $4'\ 6''$, die 2te aber $1^1/_2$mal und die 3te $1^1/_5$ mal so lang ist wie die erste (duodecimal)?
20) U sei $= 10'$ (duodecimal), die eine Seite messe $3'\ 6''$, die beiden andern seien im Verhältniß wie 1 zu 2, wie lang ist jede der beiden letzten Seiten?
21) U $= 8''$, die eine Seite $2^1/_2''$, und die 2te um $1''$ länger als die 3te, wie lang jede?
22) U $= 10'\ 6''$ (duodecimal), die Seiten verhalten sich zu einander wie 3 : 4 : 5, wie groß ist jede?
23) U $= 9'\ 6''$ (decimal), die 2te Seite sei die Hälfte der 1sten Seite, die 3te aber der 3te Theil der 2ten; wie groß ist jede?

§. 42.

Anleitung, Dreiecke zu zeichnen.

Um bestimmte 3Ecke zeichnen zu können, sind gewisse Bestimmungsstücke nothwendig, deren Anzahl immer drei ist. Diese Bestimmungsstücke sind Seiten und Winkel, jedoch so, daß darunter immer wenigstens eine Seite sich befinden muß. Da bei den gleichschenkligen Dreiecken immer 2 Seiten, bei den gleichseitigen aber alle 3 Seiten gleich sind, so reduciren sich bei den ersteren die Bestimmungsstücke auf zwei, bei den letzteren auf eines.

Um ein ungleichseitiges 3Eck zu zeichnen, braucht man

a. entweder 3 Seiten, oder

b. 2 Seiten und 1 Winkel, oder

c. 1 Seite und 2 anliegende Winkel.

Um ein gleichschenkliges △ zu zeichnen, braucht man

a. eine der gleichen Seiten und die ungleiche, oder

b. die ungleiche Seite und einen anliegenden Winkel (weil die beiden anliegenden Winkel einander gleich sind), oder

c. eine der gleichen Seiten und einen Winkel.

Um ein gleichseitiges △ zu zeichnen, braucht man bloß eine Seite desselben.

Anmerk. Es könnten hier zwar noch verschiedene Bestimmungsarten angegeben werden, wie z. B. bei dem gleichseitigen △ die Höhe u. s. w.; da diese Fälle aber weniger auf der Anschauung beruhen, also mehr in die eigentliche Geometrie gehören, so werden sie hier übergangen.

Es sollen nun gezeichnet werden:

1. gleichseitige Dreiecke

a. mit beliebiger Seite;

Auflösung. Ziehe eine beliebige Linie AB (Fig. 120.), beschreibe mit ihr als Halbmesser von ihren beiden Endpunkten A und B aus Bogen, die sich in C schneiden, ziehe AC und BC, so ist ABC ein gleichseitiges 3Eck.

b. mit gegebener Seite;

Dieselbe Auflösung, nur daß hier AB nicht beliebig, sondern gleich der gegebenen Seite gezogen werden muß.

2. gleichschenklige,

a. beliebig;

Auflösung. Man ziehe eine beliebige Linie AB (Fig. 121.), beschreibe von ihren beiden Endpunkten A und B aus mit einem Halbmesser, der entweder größer oder kleiner als AB, jedenfalls aber größer als die Hälfte der letztern sein muß,

Bogen, die sich in C schneiden, ziehe CA und CB so ist ABC ein gleichschenkliges 3Eck.

b. bestimmt;

Es sei gegeben die ungleiche Seite n und eine der gleichen m.

Auflösung. Ziehe eine Linie AB = n (Fig. 122.), beschreibe von A und B aus mit dem Halbmesser m Bogen, die sich in C schneiden, ziehe CA und CB, so ist ABC das verlangte gleichschenklige 3Eck.

Anmerk. Die übrigen 2 Fälle sind leicht auszuführen.

3. ungleichseitige,

a. beliebig;

Auflösung. Man denke sich 3 ungleiche Linien m, n und o (Fig. 123.), ziehe eine Linie AB = m, beschreibe von A mit n und von B aus mit o Bogen, die sich in C schneiden, ziehe AC und BC, so ist ABC das verlangte ungleichseitige 3Eck.

b. bestimmt;

Hier können gegeben sein:

a. 3 Seiten;

Die Auflösung ist dieselbe wie bei Nro. a., nur daß die 3 Linien m, n und o nicht willkührlich sind, wie oben, sondern bestimmt.

b. 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel;

Gegeben seien die Linien m und n und der Winkel a.

Auflösung. Man ziehe eine Linie AB=m (Fig. 124.), lege an AB in einem ihrer Endpunkte, z. B. in A einen ∠ r an = ∠ a, mache den andern Schenkel AC = n, ziehe CB, so ist △ ABC das verlangte 3Eck.

c. eine Seite und 2 anliegende Winkel.

Gegeben seien Linie m und die Winkel a und b.

Auflösung. Man ziehe eine Linie AB = m (Fig. 125.), lege an dieselbe im Punkte A den ∠ p = ∠ a, und im Punkte B den ∠ q = ∠ b, so werden sich ihre Schenkel in C schneiden und △ ABC wird das verlangte 3Eck sein.

§. 43.

Theilen der Dreiecke.

1. Soll ein 3Eck getheilt werden, so braucht man dazu Linien, welche man Theilungslinien nennt. Diese können nun ausgehen:

a. entweder von einem Punkte innerhalb des 3Ecks,

b. oder von dem Umfange.

2. Gehen die Theilungslinien von einem Punkte innerhalb des 3Ecks aus, so werden sie entweder an die Winkelspitzen oder an die Seiten gezogen. Zieht man an sämmtliche Winkelspitzen Theilungslinien, so entstehen 3 Dreiecke (Fig. 126.), zieht man sie aber an die 3 Seiten, so entstehen 3 Vierecke (Fig. 127.).

3. Werden die Theilungslinien von dem Umfange aus gezogen, so kann dieß geschehen unmittelbar von einer Seite aus, und dann gehen die Theilungslinien entweder in eine Winkelspitze oder an eine andere Seite, oder aber gehen die Theilungslinien von einer Winkelspitze aus und dann gehen sie an eine Seite.

4. Es soll ein beliebiges 3Eck in Theile mit beliebigen Formen getheilt werden

a. durch eine Theilungslinie
 1) in 2 Dreiecke,
 2) in 1 Dreieck und 1 Viereck;

b. durch zwei Theilungslinien
 a. in 3 Figuren, nämlich:
  1) in 3 Dreiecke,
  2) in 2 Dreiecke und 1 Viereck,
  3) in 2 Dreiecke und 1 Fünfeck,
  4) in 1 Dreieck und 2 Vierecke;
 b. in 4 Figuren, nämlich:
  1) in 3 Dreiecke und 1 Viereck,
  2) in 2 Dreiecke und 2 Vierecke,
  3) in 2 Dreiecke, 1 Viereck und 1 Fünfeck,
  4) in 1 Dreieck und 3 Vierecke.

Anm. Diese Uebung soll weniger eine Uebung im reinen und genauen Zeichnen sein, sie soll vielmehr den Schüler im Denken üben.

5. Es soll ein gleichseitiges 3Eck in eine Anzahl kleinerer gleichseitiger 3Ecke getheilt werden.

1ste Auflösung. Man theile jede Seite des gleichseitigen 3Ecks ABC (Fig. 128.) in gleich viele aber gleiche Theile und verbinde die gleichliegenden Punkte durch gerade Linien, so erhält man so viele gleichseitige 3Ecke, als das Quadrat Theile einer Seite anzeigt, oder die Anzahl der dadurch entstandenen 3Ecke ist gleich dem Produkte der mit sich selber multiplicirten Anzahl der Theile einer Seite. Theilt man also z. B. in dieser Figur sowohl AB als BC und AC in 4 gleiche Theile und zieht MG, LH, KJ, ebenso DM, EL, FK, endlich FG, EH und DJ, so wird dadurch das △ ABC in 4.4 d. i. in 16 gleichseitige 3Ecke getheilt.

Bei 2 Theilen also erhält man 2.2 = 4 Dreiecke,
„ 3 „ „ „ „ 3.3 = 9 „
„ 5 „ „ „ „ 5.5 = 25 „
„ 6 „ „ „ „ 6.6 = 36 „ .

2te Auflösung. Man theile die Grundlinie AB (Fig. 129.) in 2, 3, 4, u. s. w. gleiche Theile, z. B. hier in die 3 gleichen Theile AD, DE und EB, ziehe von den Theilungspunkten D und E aus mit den 2 gegenüberliegenden Seiten AC und BC die Parallelen DG und EF und wieder HE und JD und verbinde dann die gegenüberliegenden Theilungspunkte J und F, H und G durch die geraden Linien JF und HG.

Anm. Durch beide Auflösungsarten läßt sich ein gleichseitiges 3Eck nur in so viele gleichseitige 3Ecke theilen, daß ihre Anzahl immer eine Quadratzahl ist, also nur in 4, 9, 16, 25 u. s. w. 3Ecke.

§. 44.

Aufgaben zum Zeichnen.

a. Das gleichseitige 3Eck:

1. Es soll ein gleichseitiges 3Eck construirt werden, von dem eine Seite gegeben ist.

2. Ziehet eine beliebige Linie, leget an dieselbe in ihren beiden Endpunkten Winkel an, jeder = $^2/_3$R; welche Art von 3Ecken wird es in Beziehung auf die Seiten geben?

3. Ziehet eine Linie, theilet sie in 4 gleiche Theile, beschreibet über jedem derselben ein gleichseitiges 3Eck.

4. Es soll ein gleichseitiges 3Eck gezeichnet werden, von dem der Umfang gegeben ist.

5. Theilet eine gerade Linie in 4 gleiche Theile, beschreibet auf jedem derselben als Grundlinie ein gleichseitiges 3Eck, und zwar abwechslungsweise bald oberhalb bald unterhalb derselben.

6. Zeichnet ein gleichseitiges 3Eck, dessen Umfang noch einmal so groß ist als der eines gegebenen gleichseitigen 3Ecks.

7. Zeichnet ein gleichseitiges 3Eck, dessen Umfang $^3/_4$ des Umfangs eines andern gegebenen gleichseitigen 3Ecks sei.

8. Es soll ein gleichseitiges 3Eck gezeichnet werden, dessen Seiten gleich dem Umfange eines gegebenen gleichseitigen 3Ecks seien.

b. Das gleichschenklige 3Eck:

9. Ueber einer gegebenen geraden Linie als Grundlinie sollen verschiedene gleichschenklige 3Ecke gezeichnet werden.

10. Man soll ein gleichschenkliges 3Eck zeichnen, von dem die Grundlinie und eine der gleichen Seiten gegeben sind.

11. Zeichnet ein gleichschenkliges 3Eck, von dem eine der gleichen Seiten gegeben ist, und von dem man weiß, daß die Grundlinie die Hälfte einer der gleichen Seiten sei.

12. Zeichnet ein gleichschenkliges 3Eck, dessen Grundlinie sich zu einer der gleichen Seiten verhält wie 2:3.

13. Es soll ein gleichschenkliges 3Eck gezeichnet werden, von welchem der Umfang und die Grundlinie gegeben sind.

14. Von einem gleichschenkligen 3Ecke sei eine der gleichen Seiten und der Umfang gegeben; man soll dasselbe zeichnen.

15. Man soll ein gleichschenkliges 3Eck zeichnen, dessen Umfang gegeben ist, und bei dem sich die Grundlinie zu einer der gleichen Seiten verhält wie 1:2.

16. Von einem gleichschenkligen 3Ecke sei der Umfang gegeben, ebenso sei bekannt, daß er das 6fache der Grundlinie sei; man soll das 3Eck zeichnen.

17. Von einem gleichschenkligen 3Ecke seien gegeben eine der gleichen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; dasselbe zu zeichnen.

18. Zeichnet eine beliebige Linie, leget an die beiden Endpunkte derselben 2 beliebige aber gleiche Winkel an und untersuchet, ob das 3Eck gleichseitig oder gleichschenklig oder ungleichseitig sei.

19. Zeichnet ein gleichschenkliges 3Eck, von dem die ungleiche Seite und ein anliegender Winkel gegeben sind.

c. Das ungleichseitige 3Eck:

20. Es soll ein 3Eck gezeichnet werden, dessen 3 Seiten gegeben sind.

21. Von einem 3Eck seien 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben; man soll dasselbe zeichnen.

22. Zeichnet ein 3Eck, von dem 2 Seiten und der einer derselben gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

23. Man soll ein 3Eck zeichnen, von dem eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

24. Es soll ein 3Eck gezeichnet werden, von dem eine Seite gegeben sei, und bei welchem die 2te Seite einundeinhalbmal und die 3te Seite 2mal so groß sei als die gegebene erste Seite.

25. Es soll ein 3Eck gezeichnet werden, bei welchem sich die Seiten zu einander verhalten wie 5 : 4 : 3.

d. Das rechtwinklige 3Eck:

26. Von einem rechtwinkligen 3Ecke seien die beiden Katheten gegeben; man soll dasselbe zeichnen.

27. Es sei ein rechtwinkliges 3Eck zu zeichnen, von dem die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

28. Man soll ein rechtwinkliges 3Eck zeichnen, von welchem die Hypotenuse und ein spitzer Winkel gegeben sind.

29. Man soll ein rechtwinkliges 3Eck zeichnen, von welchem man eine Kathete und den anliegenden spitzen Winkel kennt.

30. Es soll ein gleichschenklig rechtwinkliges 3Eck gezeichnet werden, und zwar so, daß man entweder mit einer Kathete oder mit der Hypotenuse anfängt.

31. Man zeichne ein gleichschenklig rechtwinkliges 3Eck, von dem die Summe beider Katheten gegeben ist.

e. Dreiecke mit bestimmter Höhe:

32. Zeichnet ein beliebiges spitzwinkliges 3Eck und in demselben alle möglichen Höhen.
33. Dieselbe Uebung mit einem stumpfwinkligen 3Ecke.
34. Zeichnet 2 Dreiecke, welche gleiche Höhe haben.
35. Es soll ein 3Eck gezeichnet werden, dessen Höhe gleich der Grundlinie ist.
36. Zeichnet 2 Dreiecke, bei welchen die Höhen einander gleich sind, ebenso die Grundlinien.
37. Man soll ein beliebiges 3Eck zeichnen, dann ein zweites, dessen Grundlinie gleich der Höhe und dessen Höhe gleich der Grundlinie des ersten 3Ecks ist.
38. Zeichnet ein 3Eck, dessen Grundlinie doppelt so groß ist als die Höhe.
39. Es soll ein 3Eck gezeichnet werden, dessen Grundlinie sich zur Höhe wie 3 : 4 verhalte.

f. Dreiecke, welche einander berühren oder schneiden:

40. Zeichnet 2 Dreiecke so, daß sie einander bloß in einem Punkte berühren.
41. Es sollen 2 Dreiecke gezeichnet werden, welche sich in 2 Punkten schneiden.
42. 2 Dreiecke sollen so gezeichnet werden, daß sie einander in 3 Punkten berühren.
43. Man soll 2 Dreiecke zeichnen, welche einander in 4 Punkten schneiden.
44. Zeichnet 2 Dreiecke, die sich in 5 Punkten treffen.
45. Man zeichne 2 Dreiecke, welche sich in 6 Punkten schneiden.

g. Zusammensetzungen von Dreiecken.

46. Zeichnet mit der kleinstmöglichen Anzahl gerader Linien 4 gleichschenklig rechtwinklige 3Ecke.
47. Man soll mit der kleinstmöglichen Anzahl gerader Linien 3 gleichschenklig stumpfwinklige 3Ecke zeichnen.
48. Es sollen 4 gleichschenklig rechtwinklige 3Ecke so gezeichnet werden, daß immer eine Grundlinie senkrecht auf der andern stehe.
49. Man soll 6 gleichseitige 3Ecke so zeichnen, daß ihre Seiten parallel laufen.
50. Zeichnet ein gleichseitiges 3Eck und errichtet auf jeder Seite desselben wieder gleichseitige 3Ecke.
51. Man soll 9 gleichseitige 3Ecke so zeichnen, daß die Seiten parallel laufen, ohne daß die 3Ecke in einander liegen.
52. Zeichnet 2 gleiche Linien so, daß sie sich in ihrer Mitte senkrecht durchschneiden, zeichnet in jeden Winkel ein gleichschenklig rechtwinkliges 3Eck so, daß 2 Seiten desselben mit den Schenkeln parallel laufen.

52. Ziehet eine beliebige Linie, leget an einem Endpunkte — sowohl ober- als unterhalb — derselben einen stumpfen Winkel an = $\frac{4}{5}$ R, zeichnet zwischen die Schenkel dieser Winkel 3 gleichschenklig stumpfwinklige 3Ecke so, daß ihre Seiten mit den Schenkeln parallel laufen.

53. Ziehet eine gerade Linie, leget im Halbirungspunkte derselben rechts und links von demselben 2 spitze Winkel an, jeden = $\frac{2}{3}$ R, verlängert die Schenkel über die Winkelspitze hinaus, und machet die Verlängerungen gleich der Hälfte der ursprünglichen Linie. Zeichnet zwischen 6 so entstandenen Winkeln 6 gleichschenklige 3Ecke so, daß die gleichen Seiten mit den Schenkeln parallel laufen.

54. Verbindet 2 gleiche und gleichseitige 3Ecke so mit einander, daß die 6 Ecken einen regelmäßigen Stern bilden.

55. Bildet weitere Zusammenstellungen von 3Ecken.

Resultate zu den im §. 41. vorkommenden Aufgaben:

1) 2° 6′.
2) 4′ 10″ 6‴.
3) 1° 6′ 5″.
4) 21° 15′ 6″.
5) 2′.
6) 3′.
7) 8′ 2″ 6‴.
8) 1° 14′ 10″.
9) 2° 1′ 6″.
10) 2° 9′ 7″ 5‴.
11) 6′ 4″.
12) 5″ 6‴.
13) 1′ 8″.
14) Eine der gleichen Seiten 8″, die ungleiche Seite 1′.
15) Die ungleiche Seite 4′ 3″, eine der gleichen 5′ 8″.
16) Die ungleiche Seite 4′ 9″, eine der gleichen Seiten 9′ 8″.
17) Eine der beiden gleichen Seiten 2′ 9″, die ungleiche 4′ 6″.
18) Umfang 3′ 9″ 5‴.
19) Umfang 1° 1′ 3″.
20) Die eine Seite 2′ 2″, die andere 4′ 4″.
21) Die 3te oder kleinere Seite $2\frac{1}{4}$″, die 2te oder größere $3\frac{1}{4}$″.
22) 1ste Seite 2′ 7″ 6‴,
2te „ 3′ 6″,
3te „ 4′ 4″ 6‴.
23) 1ste Seite 5′ 7″ 6‴,
2te „ 2′ 8″ 8‴,
3te „ 9″ 6‴.

Fünfter Abschnitt.

Das Parallelogramm.

§. 45.

Eintheilung der Vierecke überhaupt.

Die 4Ecke können eingetheilt werden in Rücksicht auf die Winkel, in Rücksicht auf die Gleichheit der Seiten und in Rücksicht auf die Lage der gegenüberliegenden Seiten zu einander; da aber die beiden ersten Eintheilungen von keiner erheblichen Bedeutung sind, so werden sie übergangen und bloß die letztere Eintheilung, als die wichtigere, vorgenommen. Sieht man nämlich darauf, welche Lage die gegenüberliegenden Seiten zu einander haben, so giebt es:

a. 4Ecke, bei welchen immer die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, oder 4Ecke mit 2 Paar Parallellinien: man nennt sie Parallelogramme (Fig. 132, 142, 143, 145.); oder

b. 4Ecke mit einem Paar Parallellinien oder Trapeze (auch Paralleltrapeze genannt) (Fig. 131.), und

c. 4Ecke ohne Parallellinien oder Trapezoide (auch den Paralleltrapezen gegenüber, kurz Trapeze genannt (Fig. 130).

§. 46.

Arten der Parallelogramme.

Die Parallelogramme, welche also 4Ecke mit 2 Paar Parallellinien sind, werden eingetheilt:

1. in Rücksicht auf die Gleichheit oder Ungleichheit der Parallelpaare,

a. in gleichseitige, d. h. solche Parallelogramme, bei welchen beide Seitenpaare einander gleich sind, welche also 4 gleiche Seiten haben (Fig. 132 und 143.),

b. in ungleichseitige, bei welchen die Seitenpaare ungleich, folglich nur je 2 gegenüberliegende Seiten gleich sind (Fig. 142 und 144.);

2. in Rücksicht auf die Winkel,

a. in rechtwinklige Parallelogramme mit 4 rechten Winkeln (Fig. 132 und 142.),

b. in schiefwinklige, mit 2 stumpfen und 2 spitzen, also 4 schiefen Winkeln (Fig. 143 und 144.);

3. in beider Hinsicht,

a. in gleichseitig-rechtwinklige oder Quadrate (Fig. 132.),

b. in gleichseitig-schiefwinklige oder Rhombus (Fig. 143.),

c. in ungleichseitig-rechtwinklige oder Oblongum (länglichte Rechtecke, kurz Rechtecke, auch Rectangel (Fig. 142.),

d. in ungleichseitig-schiefwinklige oder Rhomboiden (Fig. 144.).

Was haben also Quadrat und Oblongum mit einander gemein und wodurch unterscheiden sie sich? was Quadrat und Rhombus? was Quadrat und Rhomboide? was Rhombus und Oblongum? was Rhombus und Rhomboide? was endlich Oblongum und Rhomboide?

Diejenigen 2 Seiten, welche mit einander einen Winkel bilden, heißen anliegende, die andern gegenüberliegende Seiten; in welchen Parallelogrammen sind die anliegenden Seiten gleich, in welchen ungleich?

§. 47.

Von den Diagonalen im Parallelogramm.

1. In einem Parallelogramme läßt sich von einem Punkte aus bloß eine Diagonale ziehen (§. 34, 4 a.), welche dasselbe in 2 Dreiecke theilt (Fig. 145.).

2. Zieht man in einem Parallelogramm aber alle möglichen Diagonalen, also 2, so durchschneiden sich diese und theilen das Parallelogramm in 4 besondere 3Ecke, welche ihre Spitzen in dem Durchschnittspunkte der Diagonalen haben.

3. Betrachtet man die durch die Diagonalen entstandenen 3Ecke genauer, so werden sich im Ganzen 8 verschiedene 3Ecke auffinden lassen, und zwar in Fig. 146. △ ABD, △ DBC, △ ADC, △ ABC, △ AED, △ DEC, △ CEB, und △ ABE.

4. Der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen eines Parallelogramms heißt der Mittelpunkt (Schwerpunkt) desselben.

5. In den gleichseitigen Parallelogrammen schneiden sich die Diagonalen unter rechten, bei den ungleichseitigen unter schiefen Winkeln.

6. Durch Verlängerung einer oder beider Diagonalen des Parallelogramms entstehen keine Außenwinkel.

7. Durch die Diagonalen entstehen innerhalb des Parallelogramms folgende Winkelarten und zwar:

a. durch eine Diagonale (Fig. 145.)
 a. 2 Paar benachbarte Winkel,
 b. 2 Paar innere Wechselwinkel;

b. durch beide Diagonalen (Fig. 146.)
 a. 4 Paar benachbarte Winkel,
 b. 4 Paar Nebenwinkel,
 c. 2 Paar Scheitelwinkel,
 d. 4 Paar innere Wechselwinkel,
 e. 4 Außenwinkel.

8. Suchet in Fig. 146. die angegebenen Winkelarten auf.

§. 48.

Grundlinie und Höhe des Parallelogramms.

1. Auch im Parallelogramm kann man irgend eine Seite, über welcher man dasselbe sich konstruirt denken kann, als dessen Grundlinie ansehen.

2. Fällt man von der der Grundlinie gegenüberliegenden Seite auf dieselbe oder ihre Verlängerung einen Perpendikel, so ist dieser die Höhe des Parallelogramms.

3. Da die Höhe ein von der der Grundlinie gegenüberliegenden Seite gefällter Perpendikel ist, also nicht wie bei dem 3Ecke bloß von einem Punkte ausgeht, so lassen sich auch für dieselbe Grundlinie beliebig viele Höhen denken (Fig. 133.); da ferner die Grundlinie und die ihr gegenüberliegende Seite, von welcher aus die Höhe gezogen wird, immer Parallellinien sind und diese überall gleiche Entfernungen haben, so werden auch alle zwischen diesen Linien gefällten Perpendikel, folglich auch alle Höhen, zu einer und derselben Grundlinie einander gleich sein.

4. Wenn bei 2 oder mehreren Parallelogrammen die von gegenüberliegenden Seiten auf die Grundlinien gefällten Perpendikel gleich sind, so sagt man, diese Parallelogramme haben gleiche Höhe.

5. Parallelogramme können aber bei gleicher Höhe auch gleiche Grundlinie haben.

6. Oefters kommt es vor, daß 2 Parallelogramme dieselbe

Grundlinie haben; sind ihre Höhen nun auch gleich, so sagt man, es seien Parallelogramme auf der nämlichen Grundlinie und mit gleicher Höhe, oder was dasselbe ist: Parallelogramme auf der nämlichen Grundlinie und zwischen einerlei Parallelen (Fig. 134.).

7. Bei rechtwinkligen Parallelogrammen ist, wenn eine Seite als Grundlinie angenommen wird, die anliegende Seite zugleich die Höhe desselben. Beim Rechteck ist demnach die Höhe immer entweder größer oder kleiner als die Grundlinie, nie aber gleich derselben; beim Quadrat ist jede Seite Grundlinie und Höhe zugleich.

8. Bei einem schiefwinkligen Parallelogramme kann die Höhe bald auf der Grundlinie, bald auf deren Verlängerung stehen (Fig. 133.).

§. 49.

Von dem Umfange des Parallelogramms.

1. Bei dem gleichseitigen Parallelogramme, also bei dem Quadrat und dem Rhombus, ist der Umfang das Vierfache einer Seite und umgekehrt ist eine Seite der 4te Theil des Umfangs, oder $U = 4\ S$ und $S = \frac{U}{4}$. Ist also z. B. die Seite eines Quadrats $= 15^0$, so ist sein Umfang $4.15^0 = 60^0$; ist dagegen der Umfang eines Rhombus 168^0, so ist eine Seite desselben $\frac{168^0}{4} = 42^0$.

2. Wenn der Umfang eines Quadrats oder Rhombus z. B. das Doppelte ist von dem Umfange eines andern, so ist auch eine Seite des erstern doppelt so groß als eine Seite des zweiten; denn wenn der Umfang des kleinern $= U$ ist, so ist seine Seite $= \frac{U}{4}$, und der Umfang des größern $= 2\ U$, also seine Seite $= \frac{2U}{4} = \frac{U}{2}$; die Seiten verhalten sich also wie $\frac{U}{4} : \frac{U}{2}$, d. i. wie $1 : 2$, oder umgekehrt: die Seite des größern Quadrats ist das Doppelte von der des kleinern. Allgemein: ist der Umfang eines gleichseitigen Parallelogramms das $m$fache des Umfangs eines andern gleichseitigen Parallelogramms, so verhält sich eine Seite des kleinern zu der des größern wie $1 : m$, d. h. die letztere ist auch das $m$fache der erstern; denn wenn der Umfang des kleinern $= U$ ist, so ist seine Seite $= \frac{U}{4}$; der Umfang des

größern dagegen ist $= mU$, also seine Seite $= \frac{mU}{4}$; die Seite des größern Quadrats (Rhombus) verhält sich also zu der des kleinern wie $\frac{mU}{4} : \frac{U}{4} = m : 1$.

3. Ist aber der Umfang eines Quadrats oder überhaupt eines gleichseitigen Parallelogramms der dritte Theil des Umfangs eines andern, so ist auch eine Seite des erstern der dritte Theil einer Seite des letztern; denn sie verhalten sich wie $\frac{U}{3.4} : \frac{U}{4} = \frac{1}{3.4} : \frac{1}{4} = \frac{1}{3} : 1 = 1 : 3$.

4. Da bei einem ungleichseitigen Parallelogramme, also bei einem Rechteck oder einer Rhomboide, nur die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, so folgt daraus, daß die Summe zweier ungleicher, also einen Winkel einschließenden (anliegenden) Seiten gleich dem halben Umfange ist; wäre also z. B. bei einem Rechteck der Umfang gleich 75^0, so wäre die Summe zweier einander berührenden Seiten $= {}^{75}/_{2}{}^{0} = 37^0\ 5'$.

5. Wenn in einem ungleichseitigen Parallelogramme ein Seitenpaar (die 2 gleichen oder gegenüberliegenden Seiten) das Doppelte, 3fache u. s. w. des andern Seitenpaars ist, so ist auch die größere Seite, als die Hälfte des erstern Seitenpaares, das Doppelte, 3fache u. s. w. der kleinern Seite (der Hälfte des kleinern Seitenpaares).

6. Aufgaben über den Umfang der Parallelogramme, und zwar

a. der gleichseitigen:

1) Die Seite eines Quadrats beträgt 25'' (dec.); wie groß ist der Umfang?
2) Ein Rhombus hat einen Umfang von 3' 8'' (duodec.); wie groß ist jede seiner Seiten?
3) Ein Rhombus ist aus 2 gleichseitigen 3Ecken, welche gleichen Umfang haben, zusammengesetzt; wenn nun der Umfang eines solchen 3Ecks 4^0 8' (duodec.) ist, welchen Umfang hat der Rhombus?

b. der ungleichseitigen:

4) Ein ungleichseitiges Parallelogramm hat einen Umfang von 4^0 5' 6'' (dec.), wie groß sind die 2 einen Winkel einschließenden Seiten zusammen?
5) Wenn aber die beiden einen Winkel einschließenden Seiten zusammen 7' 5'' (duodec.) groß sind, was ist der Umfang dieses Parallelogramms?

6) Eine Schiefertafel ist 9'' lang und 6'' (duodec.) breit; wie groß ist der Umfang dieser Tafel?
7) Ein Brett hat eine Länge von 13' 5'' und eine Breite von 1' 8''; welchen Umfang hat es (duodec.)?
8) Wie viel Schuh hat ein 4eckiges Tischblatt im Umfang, wenn es 5' lang und 2' 5'' (duodec.) breit ist?
9) Was ist der Umfang einer Stubenthür, welche 8' 4'' hoch und 5' 2'' breit ist (dec.)?
10) Wenn ein Fenster 6' hoch ist und 20' im Umfang hat, wie breit ist es (dec.)?
11) Ein Spiegel hat 5' 4'' im Umfang und ist 11'' breit; was ist seine Höhe (dec.)?
12) Ein 4seitig rechtwinkliges Gärtchen hat 200' Umfang; wie lang und wie breit wird dasselbe sein, wenn jede der beiden längern Seiten 6' länger ist als jede der beiden kürzern?
13) Ein 4eckiger Tisch hat 1° 8' (duodec.) Umfang; wie lang und breit ist er, wenn die Länge das Doppelte der Breite ist?
14) Ein Hofraum, welcher die Form eines Rechtecks hat, hat einen Umfang von 18° 4' (dec.); wie groß wird seine Länge und Breite sein, wenn der Hof 3mal so lang als breit ist?
15) Der Umfang einer Wiese, welche die Form eines Rechtecks hat, beträgt 16° 10' (duodec.), man weiß ferner, daß die Wiese 2½mal so lang als breit ist; wie groß ist die Länge und Breite der Wiese?
16) Ein Brett ist 15' lang und 1½' breit; dieses Brett soll genau in der Mitte der Länge durchschnitten und der Breite nach zusammengeleimt werden; bleibt der Umfang derselbe, oder um wie viel ist der 2te Umfang von dem ersten verschieden?
17) Ein Feld von 60° Länge und 40° Breite muß wie viel Umfang haben,
   a. wenn in der Mitte der Länge nach ein Weg von 1° Breite, oder
   b. wenn in der Mitte der Breite nach ein Weg von 1° Breite ist?
18) Wie groß ist der Umfang eines Rechtecks und welches sind seine Seiten, wenn 2 anliegende Seiten zusammen 12° 6' (dec.) betragen und im Verhältniß wie 2 : 3 stehen?
19) Man will einen Platz, der ein Rechteck bildet und 15° lang und 11° breit ist, mit anpassend aufrecht stehenden Brettern, wovon jedes 2' breit ist, umgeben; wie viel Stücke wird man brauchen?
20) Wie viel Ellen Band sind zum Einfassen einer Tischdecke von 8' Länge und 5½' Breite erforderlich, wenn man die Elle zu 25½'' annimmt?
21) Ein tapezirtes Zimmer von 18' Länge und 16' Breite soll oben und unten mit Borten versehen werden; wie viel Ellen werden im Ganzen dazu erforderlich sein, wenn unten für den Ofen und die Thür 8' in Abzug kommen? (Duodec.)

22) Ein Garten, der ein Parallelogramm bildet und mit seiner kürzern Seite an ein Haus stößt, soll auf den übrigen 3 Seiten mit Latten umgeben werden. Der Garten ist 3° 9′ lang und 2° 4′ breit, jede Latte soll 2″ breit sein und von der andern 1½″ abstehen. Wie viel solcher Lattenstücke sind nöthig? (Dec.)

§. 50.

Anleitung Parallelogramme zu zeichnen.

1. Sollen bestimmte Parallelogramme gezeichnet werden, so müssen von ihnen so viel Stücke gegeben sein, als nothwendig sind; man braucht nämlich

a. zu einem Quadrat, da alle 4 Seiten gleich, auch die Winkel, als rechte Winkel, bekannt sind, bloß eine Seite;

b. zu einem Rectangel die 2 Seiten, welche einen rechten Winkel einschließen, da auf diese Art alle 4 Seiten und außerdem alle Winkel, als rechte Winkel, bekannt sind;

c. zu einem Rhombus bloß eine Seite und einen Winkel, weil alle Seiten einander gleich sind, und, wenn man — wie sich später in der Geometrie beweisen lassen wird — einen Winkel kennt, alle übrigen durch die Construktion sich von selbst ergeben;

d. zu einer Rhomboide die beiden einen Winkel einschließenden Seiten, nebst dem eingeschlossenen Winkel.

2. Ein Quadrat soll gezeichnet werden, von dem eine Seite gegeben ist.

1ste Auflösung. Man ziehe eine Linie AB = der gegebenen Linie M (Fig. 135.), errichte auf derselben in A und B die beiden Perpendikel AD und BC, jeden = AB = M, verbinde die beiden Punkte D und C durch die Gerade DC, so ist ABCD das verlangte Quadrat.

2te Auflösung. Man ziehe AB = M (Fig. 136.), lege an einen Endpunkt derselben, z. B. an A einen rechten Winkel an, mache dessen Schenkel AD = dem andern AB, beschreibe von D und B aus mit AB oder M als Halbmesser Bogen, die sich in C schneiden, ziehe DC und BC, so ist ABCD das verlangte Quadrat.

3te Auflösung. Ziehe wieder AB = M (Fig. 138.), beschreibe von A und B mit AB als Halbmesser die beiden Bogen AD und BC, vom Durchschnittspunkte F aus beschreibe mit AB

einen Bogen, der in E schneidet, beschreibe von E und F aus mit gleichen Halbmessern Bogen, die sich in H schneiden, ziehe HA, welche den Bogen in J trifft, von J aus beschreibe mit AB einen Bogen, der den Bogen AD in G schneidet; ziehe endlich JG und GB, so ist ABGJ das verlangte Quadrat.

3. Ein Rechteck soll gezeichnet werden, von dem die 2 ungleichen Seiten M und N gegeben sind.

1ste Auflösung. Ziehe AB = M (Fig. 137.), errichte in beiden Endpunkten derselben die Perpendikel AD und BC, jeden = N, ziehe DC, so ist ABCD das verlangte Rechteck.

2te Auflösung. Ziehe wieder PQ = M (Fig. 139.), errichte auf derselben in P den Perpendikel PS = N, beschreibe von S aus mit M und von Q aus mit N als Halbmesser Bogen, die sich in R schneiden, ziehe SR und QR, so ist PQRS das verlangte Rechteck.

4. Einen Rhombus zu zeichnen, von dem eine Seite M und ein Winkel m gegeben sind.

Auflösung. Ziehe AB = M (Fig. 140.), lege an dieselbe in A ∠ n = ∠ m an, mache den andern Schenkel AD = AB = M, beschreibe von D und B aus mit M als Halbmesser Bogen, die sich in C schneiden, ziehe DC und BC, so ist ABCD der verlangte Rhombus.

5. Es soll eine Rhomboide gezeichnet werden, von welcher die 2 ungleichen Seiten M und N und ein Winkel m gegeben sind.

Auflösung. Ziehe eine Linie AB = M (Fig. 141.), lege an dieselbe in A einen Winkel n = ∠ m an, mache den Schenkel AD = N, beschreibe von D aus mit AB oder M und von B aus mit N als Halbmesser Bogen, die sich in C schneiden, ziehe DC und BC, so ist ABCD die verlangte Rhomboide.

§. 51.

Theilung der Parallelogramme.

Diese Uebung ist besonders geeignet, die Selbstthätigkeit der Schüler in Anspruch zu nehmen; es soll nämlich ein Parallelogramm getheilt werden

1. durch eine Theilungslinie
   a. in 2 Dreiecke,
   b. in 1 Dreieck und 1 Viereck,
   c. in 1 Dreieck und 1 Fünfeck,
   d. in 2 Vierecke;

2. durch zwei Theilungslinien

a. in 2 Figuren (was aber nur bei einspringenden Winkeln angeht), und zwar
   a. in 1 Dreieck und 1 Fünfeck,
   b. in 1 Dreieck und 1 Sechseck,
   c. in 1 Dreieck und 1 Siebeneck,
   d. in 1 Viereck und 1 Fünfeck,
   e. in 2 Fünfecke;

b. in drei Figuren, und zwar
   a. in 3 Dreiecke,
   b. in 2 Dreiecke und 1 Viereck,
   c. in 2 Dreiecke und 1 Fünfeck,
   d. in 2 Dreiecke und 1 Sechseck,
   e. in 1 Dreieck und 2 Vierecke,
   f. in 1 Dreieck, 1 Viereck und 1 Fünfeck,
   g. in 3 Vierecke;

c. in vier Figuren, nämlich
   a. in 4 Dreiecke,
   b. in 3 Dreiecke und 1 Viereck,
   c. in 3 Dreiecke und 1 Fünfeck,
   d. in 2 Dreiecke und 2 Vierecke,
   e. in 2 Dreiecke und 2 Fünfecke,
   f. in 2 Dreiecke, 1 Viereck und 1 Fünfeck,
   g. in 1 Dreieck und 3 Vierecke,
   h. in 1 Dreieck, 2 Vierecke und 1 Fünfeck,
   i. in 4 Vierecke.

§. 52.

Aufgaben zum Zeichnen.

a. Das Quadrat.

1. Es soll ein Quadrat gezeichnet werden, von dem eine Seite gegeben ist.

2. Zeichnet 2 gleiche gerade Linien so, daß sie einander in ihren Halbirungspunkten senkrecht durchschneiden, verbindet ihre Endpunkte durch gerade Linien; welche Figur werden letztere Linien bilden?

3. Von einem Quadrat sei der Umfang gegeben, man soll dasselbe zeichnen.

4. Zeichnet ein Quadrat, dessen Umfang halb so groß ist als der eines gegebenen Quadrats.

5. Ueber ein gegebenes Quadrat soll ein anderes so gezeichnet werden, daß die Seite des letztern gleich dem Umfange des ersteren sei.

6. Dieselbe Uebung, nur daß letzteres Quadrat in keine Berührung mit dem ersteren komme.

7. Zeichnet ein Quadrat, das mit einem gegebenen Rechteck gleichen Umfang hat.

b. Der Rhombus.

8. Ein Rhombus soll gezeichnet werden, von dem ein Winkel und eine Seite gegeben sind.

9. Zeichnet einen Rhombus, dessen Seite gleich einer gegebenen Geraden und dessen einer Winkel = $^2/_3$R sei.

10. Von einem Rhombus sei der Umfang gegeben, ebenso soll der stumpfe Winkel = $^4/_3$R sein; es soll derselbe gezeichnet werden.

11. Es soll ein Rhombus gezeichnet werden, von dem eine Seite und eine der Diagonalen gegeben sind.

12. Man soll einen Rhombus zeichnen, der einen gegebenen Winkel habe, und dessen Umfang gleich dem eines gegebenen Rechtecks sei.

13. Es sei ein Rhombus zu zeichnen, dessen Seite und Höhe gegeben sind.

14. Zeichnet 2 ungleiche Linien so, daß sie einander in ihren Mittelpunkten senkrecht durchschneiden, und verbindet ihre Endpunkte durch gerade Linien, welche Art von Parallelogramm entsteht dann, wenn ihr die Seiten und Winkel miteinander vergleichet?

c. Das Rechteck.

15. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, von dem die beiden ungleichen Seiten gegeben sind.

16. Zeichnet ein Rechteck, von dem die Grundlinie gegeben und bei welchem die Höhe der 3te Theil der Grundlinie ist.

17. Zeichnet ein Rechteck, dessen eines Seitenpaar die Hälfte des andern ist.

18. Ein Rechteck zu zeichnen, von dem eine Seite und eine Diagonale gegeben sind.

19. Es soll ein Rechteck gezeichnet werden, dessen Umfang gegeben ist, und bei welchem die kleinere Seite die Hälfte der größern ist.

20. Von einem Rechteck ist der Umfang gegeben, auch ist bekannt, daß die Grundlinie das 3fache der Höhe sei; man soll das Rechteck zeichnen.

d. Die Rhomboide.

21. Es soll eine Rhomboide gezeichnet werden, von welcher die beiden ungleichen Seiten und ein Winkel gegeben sind.

22. Man soll eine Rhomboide zeichnen, von welcher die beiden ungleichen Seiten und die Höhe gegeben sind.

23. Eine Rhomboide soll gezeichnet werden, von der man die beiden ungleichen Seiten und eine Diagonale kennt.

24. Man soll eine Rhomboide zeichnen, von welcher eine Seite und eine Diagonale gegeben sind, so wie der der letztern gegenüberliegende Winkel.

e. Zusammenstellungen der verschiedenen Parallelogramme.

25. Zeichnet die gleichseitigen Parallelogramme neben einander, so daß sie gleiche Grundlinie haben.

26. Man soll die verschiedenen ungleichseitigen Parallelogramme zeichnen mit gleicher Grundlinie und Höhe.

27. Es sollen die rechtwinkligen Parallelogramme neben einander gezeichnet werden, aber mit verschiedenen Grundlinien und verschiedenen Höhen.

28. Zeichnet sämmtliche Arten von Parallelogrammen so, daß sie alle gleiche Grundlinien haben.

f. Zusammensetzungen von Parallelogrammen.

29. Zeichnet ein Quadrat und außerhalb desselben auf jeder Seite ein Rechteck, dessen Höhe die Hälfte der Grundlinie, also die Hälfte einer Seite des Quadrats ist.

30. Zeichnet 6 Quadrate so in einander, daß ihre gleichliegenden Seiten gleiche Entfernung von einander haben und einander parallel sind.

31. Es sollen 4 ungleiche Quadrate so in einander gezeichnet werden, daß die Grundlinien auf einander liegen.

32. Zeichnet 9 gleiche Quadrate mit der kleinstmöglichen Anzahl von Linien.

33. Verbindet 2 gleiche gerade Linien so, daß sie einander in der Mitte senkrecht durchschneiden, zeichnet in die 4 Winkel 4 gleiche Quadrate, deren Seiten mit den Schenkeln parallel laufen.

34. Lasset 4 gleiche gerade Linien einander in einem Punkte so durchschneiden, daß sie 8 gleiche spitze Winkel bilden, zeichnet zwischen dieselben 8 gleiche Rhombus so, daß ihre Seiten mit den Schenkeln parallel laufen.

35. Bildet selbst Zusammensetzungen aus Parallelogrammen, und zwar

a. aus bloßen Quadraten,
b. aus bloßen Rechtecken,
c. aus schiefwinkligen Parallelogrammen,
d. aus verschiedenen Parallelogrammen.

Resultate zu den im §. 49. vorkommenden Aufgaben:

1) 1^0.
2) 14′ 8″.
3) 6^0.
4) 2^0 2′ 8″.
5) 14′ 10″.
6) 2′ 6″.
7) 1^0 14′ 2″.
8) 14′ 10″.
9) 2^0 7′ 2″.
10) 4′.
11) 1′ 6″.
12) 53′.
13) Länge 8′, Breite 4′.
14) Breite 23′, Länge 69′.
15) Breite 2^0 6′, Länge 5^0 15′.
16) Der 2te Umfang um 12′ geringer.
17) a. 318^0, b. 278^0.
18) Umfang 25^0 2′, kleinere Seite 5^0 4″, größere Seite 7^0 5′ 6″.
19) 260 Bretter.
20) $10\,^{10}/_{17}$ Ellen.
21) $60\,^{3}/_{17}$ Ellen.
22) $291\,^{3}/_{7}$ Latten.

Sechster Abschnitt.

Der Kreis.

§. 53.

Entstehung der Kreislinie.

1. Denkt man sich eine begrenzte gerade Linie ab (Fig. 147.) an einem ihrer Endpunkte a festgehalten und so lange in einer Ebene herumbewegt, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so beschreibt der andere Endpunkt b eine krumme Linie, welche Kreislinie genannt wird.

2. Aus Obigem geht hervor, daß alle Punkte der Kreislinie gleichweit von dem Punkte a entfernt sein müssen. Durch das Fortbewegen der Linie ab kommt sie nach und nach in die Lagen ab′, ab″, ab‴, ab⁗; woraus ersichtlich ist, daß die Punkte b, b′, b″, b‴ und b⁗ immer die gleiche Entfernung vom Punkte a haben.

3. Eine Kreislinie ist also eine solche krumme Linie, deren Punkte von einem innerhalb derselben liegenden Punkte gleiche Entfernung haben.

4. Aber nicht nur der Endpunkt b beschreibt bei der Bewegung der Linie ab eine Kreislinie, sondern jeder Punkt derselben (z. B. c, d, e, f, g, h, i u. s. w.) außer dem feststehenden Endpunkte a (Fig. 148.).

5. Der Punkt a (Fig. 147 und 148.), in welchem man sich die Linie festgehalten denkt, heißt Mittelpunkt oder Centrum. Mittelpunkt ist also derjenige Punkt im Kreise, welcher von allen Punkten der Kreislinie gleichweit entfernt ist.

6. Soll vermittelst eines Zirkels eine Kreislinie beschrieben werden, so setzt man die eine Spitze im Mittelpunkte fest und bewegt die andere Spitze so weit herum, bis sie den anfänglichen Punkt erreicht. Man sagt deßhalb auch manchmal: einen „Zirkel" (anstatt eine Kreislinie) beschreiben.

7. Eine Kreislinie hat keinen Anfangs- und keinen Endpunkt.

8. Jeder Punkt außerhalb der Kreislinie liegt weiter vom

Mittelpunkte als irgend ein Punkt der Kreislinie, und umgekehrt: ist ein Punkt innerhalb der Kreislinie, so liegt er näher am Mittelpunkte als jeder Punkt der Kreislinie. Wann kann man also von einem Punkte behaupten, daß er näher oder entfernter vom Mittelpunkte sei, als irgend ein Punkt der Kreislinie?

9. Ein Kreis ist der Lage nach gegeben, wenn bloß sein Mittelpunkt bestimmt ist, dagegen seiner Größe nach, wenn man seinen Halbmesser kennt. Soll ein Kreis vollkommen bestimmt sein, so müssen Mittelpunkt und Halbmesser gegeben sein.

§. 54.

Unterschied zwischen Kreislinie, Kreisbogen und Kreisfläche.

1. Unter Kreislinie versteht man, wie schon oben gesagt wurde, eine solche in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, welche von einem bestimmten Punkte — dem Mittelpunkte — überall gleichweit entfernt ist.

2. Denkt man sich von der Kreislinie ein Stück abgeschnitten, so heißt dieses Stück Kreisbogen oder kurz Bogen. Ein Kreisbogen ist also bloß ein Theil der Kreislinie.

Durchschneiden sich zwei Bogen, so heißen sie Kreuzbogen und ihr gemeinschaftlicher Punkt — Durchschnittspunkt.

3. Die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche heißt Kreisfläche. Eine Kreisfläche ist also nur von einer einzigen Linie begrenzt oder eingeschlossen. Sie ist demnach eine solche einseitige Figur, deren Grenzlinie in allen ihren Punkten von einem in ihr liegenden Punkte — dem Mittelpunkte — gleichweit entfernt ist.

4. Kreisfläche ist also eine Figur, deren Umfang die Kreislinie ist, welch' letztere deßhalb auch Umkreis oder Peripherie genannt wird.

5. Das Wort „Kreis" wird bald als Kreislinie, bald als Kreisfläche gebraucht.

§. 55.

Bezeichnung des Kreises.

1. Eine Kreislinie wird ebenfalls durch Buchstaben bezeichnet; man setzt nämlich an mehrere Punkte der Peripherie Buchstaben und benennt den Kreis darnach, wie z. B. in Fig. 149. der äußere Kreis ABCD, der mittlere abcd heißt. Oefters auch setzt man

bloß einen Buchstaben, der aber dann in die Mitte zu stehen kommt, wie z. B. in derselben Figur der innere Kreis M heißt.

2. Um Undeutlichkeit zu vermeiden, muß, wenn sonst keine nähere Bezeichnung einen Wink giebt, ein Kreisbogen immer durch wenigstens 3 Buchstaben bezeichnet werden. So ist es z. B. zweifelhaft, wenn man von dem Bogen AC spricht (Fig. 150.), ob der obere oder der untere Bogen gemeint ist; deßwegen muß man, wenn jener gemeint ist, ADC sagen, und bei diesem ABC.

§. 56.

Von den bei dem Kreise vorkommenden geraden Linien.

A. Linnien innerhalb der Peripherie:

a. Der Halbmesser (Radius).

1. Jede gerade Linie, welche den Mittelpunkt mit irgend einem Punkte der Peripherie verbindet, heißt Halbmesser oder Radius, wie z. B. in Fig. 147. die Linie ab, oder ab′ u. s. w.

2. Da der Halbmesser die Entfernung des Mittelpunktes von irgend einem Punkte der Peripherie angiebt, sämmtliche Punkte der Peripherie aber gleiche Entfernung vom Mittelpunkte haben, so folgt daraus, daß alle Halbmesser in demselben Kreise einander gleich sind.

3. In einem Kreise kann man Halbmesser ziehen so viel man will.

4. Von 2 Kreisen sagt man, sie seien einander gleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben. Gleiche Kreise haben demnach auch gleiche Halbmesser.

5. Jeder Punkt außerhalb eines Kreises hat eine Entfernung vom Mittelpunkte, die größer ist, und jeder Punkt innerhalb des Kreises eine Entfernung vom Mittelpunkte, die kleiner ist als der Halbmesser des Kreises.

Ist demnach die Entfernung irgend eines Punktes vom Mittelpunkte gleich dem Radius, so ist er auf der Peripherie, ist sie größer als der Radius, so ist er außerhalb, ist sie aber kleiner, innerhalb des Kreises.

6. Halbmesser können in demselben Kreise nie parallel sein; warum nicht?

b. Der Durchmesser (Diameter).

1. Denkt man sich irgend einen Halbmesser AE (Fig. 150.) über den Mittelpunkt hinaus rückwärts bis zur Peripherie, also hier von E bis C verlängert, so heißt man die ganze Linie AC einen Durchmesser oder Diameter.

2. Da die Verlängerung EC selbst wieder ein Halbmesser ist, so kann man sagen, ein Durchmesser ist nichts anderes als zwei Halbmesser, welche in gleicher Richtung liegen, also eine gerade Linie bilden.

3. Der Durchmesser ist also eine gerade Linie, welche 2 Punkte der Peripherie verbindet und zugleich durch den Mittelpunkt geht.

4. Alle Durchmesser in dem nämlichen Kreise sind einander gleich; warum wohl?

5. Auch in gleichen Kreisen sind die Durchmesser einander gleich.

6. In einem Kreise lassen sich unendlich viele Durchmesser ziehen.

7. Alle Durchmesser halbiren sich.

8. Jeder Durchmesser theilt nicht nur die Kreislinie, sondern auch die Kreisfläche selbst in 2 gleiche Theile. Eine solche Hälfte der Kreisfläche nennt man Halbkreis. Unter Halbkreis versteht man also dasjenige Stück des Kreises, welches zwischen dem Durchmesser und der halben Peripherie liegt.

9. Durchschneiden 2 Durchmesser einander senkrecht, so theilen sie sowohl die Kreislinie als die Kreisfläche in 4 gleiche Theile; ein solcher vierter Theil der Kreisfläche heißt Quadrant. Quadrant ist also dasjenige Stück eines Kreises, welches zwischen 2 senkrecht auf einander stehenden Halbmessern und dem vierten Theil der Peripherie liegt.

10. Durchmesser im nämlichen Kreise können nie parallel sein.

c. Die Sehne (Chorde).

1. Eine gerade Linie, welche eine Kreislinie in 2 Punkten berührt, deren Endpunkte also in der Peripherie liegen, heißt Sehne oder Chorde; in Fig. 151. sind also ab, cd und ef Sehnen.

2. Geht eine Sehne zugleich durch den Mittelpunkt, wie z. B. in Fig. 150., so wird sie zum Durchmesser. Alle Durchmesser sind demnach Chorden, aber nicht alle Chorden sind Durchmesser.

3. In einem Kreise lassen sich unendlich viele Sehnen ziehen.

4. Durch eine Sehne, welche aber nicht zugleich Durchmesser sein darf, wird sowohl der Kreis als die Peripherie in 2 ungleiche Theile getheilt.

5. Sehnen können sein

a. gleich oder ungleich,

b. parallel oder nicht parallel,

c. einander durchschneidend, oder bloß berührend oder einander gar nicht treffend.

6. Sehnen sind vollständig begrenzte gerade Linien.

B. Linien außerhalb der Peripherie:

Die Tangente (Berührungslinie).

1. Ist eine Linie bc (Fig. 175.) von der Eigenschaft, daß sie den Kreis bloß von außen berührt, also, selbst wenn man sie verlängern würde, mit dem Kreis nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, so heißt eine solche Linie Tangente oder Berührungslinie.

2. Der Punkt, in welchem die Tangente den Kreis trifft, heißt Berührungspunkt.

3. Es lassen sich an einen Kreis beliebig viel Tangenten ziehen.

4. Gehört eine Tangente zweien Kreisen an, so heißt sie eine gemeinschaftliche Tangente.

C. Linien sowohl innerhalb als außerhalb der Peripherie:

Die Sekante (Schneidungslinie).

1. Denkt man sich eine Chorde an beiden Endpunkten über die Peripherie hinaus verlängert, so heißt eine solche Linie Sekante oder Schneidungslinie, wie z. B. in Fig. 152. ab oder cd.

2. Eine Sekante ist also eine solche Linie, welche die Peripherie in 2 Punkten schneidet.

3. Das zwischen der Peripherie liegende Stück der Sekante ist eine Chorde.

4. Sekanten können sein:
 a. begrenzt oder unbegrenzt,
 b. gleich oder ungleich,
 c. parallel oder nicht parallel,
 d. einander durchschneidend, oder berührend, oder einander gar nicht treffend.

D. Fragen über die verschiedenen beim Kreise vorkommenden geraden Linien:

1. Wie vielerlei gerade Linien kommen bei dem Kreise vor, und welche von diesen Linien sind bloß innerhalb, welche bloß außerhalb, und welche sind sowohl innerhalb als außerhalb des Kreises?

2. Was haben Durchmesser und Sehnen Gemeinschaftliches und wodurch unterscheiden sie sich?

3. Wodurch unterscheiden sich Durchmesser und Sekanten?

4. Auf wie vielerlei Arten kann der Durchmesser definirt werden?

5. Was haben Halbmesser und Tangenten gemein und wodurch unterscheiden sie sich?

6. In wie vielerlei Beziehungen unterscheiden sich Sehnen und Tangenten?

7. Wie viel lassen sich von jeder dieser Linien-Arten in einem Kreise ziehen?

8. Welche von diesen fünferlei Arten von Linien können Parallellinien haben und welche nicht?

9. Welche von diesen Linien können und welche müssen immer in demselben Kreise gleich sein?

10. Giebt es auch gleichnamige Linien, welche sich stets berühren und welche sich stets schneiden müssen?

11. Welche Arten von Linien können sich nie schneiden und welche können — aber müssen sich nicht schneiden?

12. Welche von diesen Linien sind immer begrenzt, welche können auch unbegrenzt sein?

13. Wie können wir uns aus einem Halbmesser einen Durchmesser und wie aus einer Chorde eine Sekante entstanden denken?

14. Welche Linien sind bloß Theile von andern Linien?

§. 57.

Von den im Kreise vorkommenden Winkeln.

1. Es kommen hier hauptsächlich 2 Arten von Winkeln vor (Fig. 153.):

a. solche, welche ihre Spitze im Mittelpunkte des Kreises haben und deren Schenkel Halbmesser sind; man nennt sie Centri- oder Mittelpunktswinkel, wie z. B. ∠ a;

b. solche Winkel, deren Spitze in der Peripherie liegt, und deren Schenkel Chorden sind, wie z. B. ∠ b. Man heißt solche Winkel Peripherie- oder Umfangs-Winkel.

2. Sowohl von einem Mittelpunktswinkel als auch von einem Umfangswinkel sagt man, sie stehen auf dem Bogen, der zwischen ihren Schenkeln liegt: so steht ∠ a auf dem Bogen AEB, der ∠ b dagegen auf dem Bogen DEC.

3. Centri- oder Peripheriewinkel können entweder auf gleichem Bogen stehen oder nicht; stehen sie auf dem gleichen Bogen, so kann

a. die Spitze des Centriwinkels auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegen,

b. oder die Spitze fällt innerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels,

c. oder sie fällt außerhalb des Peripheriewinkels.

4. Wenn ein Winkel seine Spitze in der Peripherie hat und seine Schenkel auf den Endpunkten des Durchmessers aufstehen, so

heißt ein solcher Winkel Winkel im Halbkreis. Ein Winkel im Halbkreis ist also ein solcher Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf den Endpunkten des Durchmessers stehen.

5. In der Geometrie wird bewiesen, daß jeder Winkel im Halbkreis = R ist; auf diese Art läßt sich über einer gegebenen Linie leicht ein rechter Winkel construiren. Man betrachte nämlich die gegebene Linie als Durchmesser, beschreibe über derselben einen Halbkreis, nehme auf demselben einen beliebigen Punkt an, und verbinde ihn durch gerade Linien mit den Endpunkten des Durchmessers, so erhält man immer einen rechten Winkel; demnach wären in Figur 154. die Winkel a, b, c und d rechte, über AB beschriebene Winkel.

Alle Winkel im Halbkreis sind demnach einander gleich.

§. 58.

Von den vom Kreise abgeschnittenen Stücken.

1) Wird von der Kreisfläche durch eine Sehne ein Stück abgeschnitten, so nennt man dieses abgeschnittene Stück einen Kreisabschnitt oder Abschnitt oder Segment. Ein Kreisabschnitt ist also dasjenige Stück einer Kreisfläche, welches von einem Bogen und der dazu gehörigen Sehne begrenzt wird, wie z. B. in Fig. 155. das Stück ABC.

2. Dasjenige Stück der Kreisfläche, welches durch die Schenkel eines Centriwinkels und durch den dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt Kreisausschnitt oder Sektor oder kurz Ausschnitt. Kreisausschnitt ist also dasjenige Stück einer Kreisfläche, welches zwischen 2 Halbmessern, die aber keine gerade Linie bilden, und dem dazu gehörigen Bogen ist, wie z. B. in derselben Figur das Stück DEFG.

3. Die Chorde AB, welche von der Kreisfläche das Segment abschneidet, theilt zugleich dieselbe, so wie die Kreislinie in gleiche oder ungleiche Theile; die Theile werden nämlich ungleich, wenn AB eine bloße Chorde ist, wie in Fig. 155., sie werden aber gleich, wenn die Chorde zugleich Durchmesser ist (Fig. 150.). Sind die Abschnitte ungleich, so heißt der eine der größere, der andere der kleinere Kreisabschnitt; demnach wäre in Fig. 156. AFEB der größere und ACDB der kleinere Kreisabschnitt.

4. Der Bogen EFG (Fig. 155.), welcher mit den beiden Halb-

messern ED und GD den Kreisausschnitt begrenzt, heißt der Bogen des Ausschnitts und der dazu gehörige Centriwinkel EDG ist der Winkel des Kreisausschnitts.

5. Nimmt man auf dem zu einem Kreisabschnitt gehörigen Bogen einen beliebigen Punkt an und verbindet diesen durch 2 gerade Linien mit den Endpunkten der den Kreisabschnitt begrenzenden Chorde, so heißt der dadurch entstandene Winkel der Winkel im Kreisabschnitt. Die Winkel ACB und ADB (Fig. 156.) wären demnach Winkel im kleinern und AEB und AFB Winkel im größern Kreisabschnitte.

§. 59.

Von der Lage zweier oder mehrerer Kreise zu einander.

1. Zwei Kreise haben
a. entweder denselben Mittelpunkt, dann heißen sie concentrische oder Parallelkreise, wie z. B. in Fig. 149. die Kreise ABCD und abcd, oder
b. sie haben verschiedene Mittelpunkte, sie heißen dann excentrische Kreise; diese liegen nun entweder
  a. in einander, wenn der eine ganz innerhalb des andern liegt, und zwar
    aa) ohne einander zu berühren (Fig. 157.),
    bb) indem sie einander berühren (Fig. 158.);
  b. oder außer einander, wenn der eine mit keinem Theil in dem andern liegt, wobei vorkommen kann,
    aa) daß sie einander berühren (Fig. 159.), oder
    bb) einander nicht berühren (Fig. 160.);
  c. oder theils in- theils außer einander, d. h. sie schneiden sich (Fig. 161.).

2. Bei concentrischen Kreisen liegt immer der kleinere Kreis in dem größern.

3. Sind excentrische Kreise in einander, so muß einer derselben immer kleiner sein als der andere, sind sie aber außer einander oder schneiden sie sich, so können sie entweder gleich oder ungleich sein.

4. Liegt ein Kreis so innerhalb eines andern, daß er ihn weder berührt, noch auch den Mittelpunkt mit letzterem gemein hat, so sagt man von ihm, er sei ein Kreis im Kreise (Fig. 157.).

5. Hat ein Kreis einen Punkt der Peripherie mit einem

andern gemeinschaftlich, so sagt man, er berühre den letztern, und zwar

a. von innen, wenn alle Theile des erstern, außer dem Berührungspunkte, innerhalb des zweiten Kreises liegen (Fig. 158.),

b. von außen, wenn sie außerhalb liegen (Fig. 159.).

6. Diejenige gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier Kreise verbindet, heißt Centrallinie, wie z. B. die Linie AB in Fig. 158 und 159.

7. Es lassen sich nicht nur 2, sondern beliebig viel concentrische Kreise ziehen, wobei vorkommen kann,

a. daß sie gleiche (Fig. 149.) und

b. ungleiche Entfernungen von einander haben (Fig. 162.).

8. Der Raum zwischen 2 concentrischen Kreisen heißt concentrischer Ring oder kurz Ring; zwischen concentrischen Kreisen liegt immer ein Ring weniger als es Kreise sind; z. B. zwischen 7 concentrischen Kreisen giebt es 7 — 1 = 6 Ringe, zwischen 12 Kreisen 12 — 1 = 11 concentrische Ringe u. s. w.

9. Dasjenige Stück eines Ringes, welches zwischen 2 Halbmessern liegt, heißt Ausschnitt des Ringes, wie z. B. in Fig. 163. das Stück ABCD.

10. Unter gemeinschaftlicher Sehne versteht man eine solche Sehne, welche zweien Kreisen zugleich angehört; sie ist also eine gerade Linie, welche die beiden Durchschnittspunkte zweier einander schneidenden Kreise verbindet, z. B. in Fig. 164. die Linie AB.

11. Zwei Kreise berühren sich von außen, wenn die Centrallinie gleich der Summe ihrer Halbmesser ist (Fig. 159.), und von innen, wenn die Centrallinie gleich der Differenz ihrer Halbmesser ist (Fig. 158.).

§. 60.

Von dem Messen der Winkel durch einen Kreisbogen.

1. Früher wurde gezeigt, daß man die Größe der Winkel nach dem rechten Winkel bestimme, sie also durch letztern messe. Da jedoch die Untersuchung, der wievielte Theil ein bestimmter Winkel von einem rechten Winkel ist, Schwierigkeiten hat, so mißt man Winkel häufiger noch durch seinen Kreisbogen. Man zeichnet nämlich in einem Kreise 2 einander senkrecht durchschneidende Durchmesser, so werden dadurch nicht nur die Winkel um den Mittelpunkt herum in 4 gleiche, also 4 rechte Winkel getheilt,

sondern auch den Kreis selbst sowie die Kreisperipherie schneiden sie in 4 gleiche Stücke. Jeder rechte Winkel steht auf einem Bogen, welcher der 4te Theil der Kreislinie ist. Theilt man nun jeden dieser R wieder in 2, 3, 4 u. s. w. gleiche Theile, so wird auch durch die verlängerten Theilungslinien der entsprechende Bogen in 2, 3, 4 u. s. w. gleiche Theile getheilt. Ueberhaupt wird immer in demselben Verhältniß, in welchem ein Winkel am Mittelpunkte getheilt wird, auch sein entsprechender Bogen getheilt. Es läßt sich daher von der Größe des Winkels auf die Größe seines Bogens, und umgekehrt von der Größe des Bogens auf die Größe seines entsprechenden Winkels schließen. Daß darauf die Größe des Kreises keinen Einfluß hat, ist leicht einzusehen, denn das Verhältniß zwischen Winkel und seinem dazu gehörigen Bogen bleibt dasselbe, der Kreis mag groß oder klein sein. Man kennt daher die Größe eines Winkels, sobald man seinen Bogen kennt, d. h. sobald man weiß, der wievielte Theil derselbe von der ganzen Kreislinie ist.

2. Man theilt zu diesem Zwecke die Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile oder Grade, die man Bogengrade nennt. Zieht man nun von den Bogengraden gerade Linien an den Mittelpunkt, so werden dadurch auch die Winkel um denselben in 360 Theile oder Winkelgrade getheilt, und zwar kommen auf einen bestimmten Winkel genau so viele Winkelgrade, als sein entsprechender Bogen Bogengrade hat.

3. Dieses Messen der Winkel ist aber eigentlich kein Winkelmessen, wie es früher gezeigt wurde, denn das Maß für einen Winkel kann bloß wieder ein Winkel sein und kein Bogen, sondern man schließt von den Bogengraden auf die Winkelgrade. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Grade der Bogen hat, bezeichnet zu gleicher Zeit auch die Anzahl der Grade, die der dazu gehörige Winkel enthält. Wenn man also sagt: die Winkel werden durch die zwischen ihren Schenkeln liegenden Bogen gemessen, so heißt dieß: die Zahl der Bogengrade ist immer gleich der Zahl der Winkelgrade.

4. So wie der Winkelgrad in 60 gleiche Theile eingetheilt wird, so theilt man auch den Bogengrad in 60 gleiche Theile, die man Minuten nennt, und jede dieser wieder in 60 Sekunden. Man bezeichnet ebenfalls die Bogengrade mit einer rechts oben stehenden Null (^{0}), die Minuten mit einem Komma oder Striche ($'$) und die Sekunden mit zwei Strichen ($''$); 45^0

47′ 18″ heißt also: 45 Grade, 47 Minuten und 18 Sekunden.

5. Da nun die Kreislinie aus 360° besteht und ein rechter Winkel von dem 4ten Theile der Kreislinie umspannt wird, folglich ein dem R zugehöriger Bogen 90 Bogengrade mißt, so kommen auch auf den R 90 Winkelgrade, kurz 90°, auf einen $\frac{1}{2}$ R also 45°, auf einen $\frac{1}{3}$ R 30°, auf einen $\frac{2}{3}$ R 2.30° = 60°.

6. Um die Größe eines Winkels, d. h. die Grade des einem Winkel entsprechenden Bogen leicht zu finden, hat man ein eigenes Instrument, den sogenannten Winkelmesser oder Transporteur (Fig. 165.). Dieß ist nämlich ein gewöhnlich aus Messing, manchmal auch aus Pappendeckel oder Holz gefertigter Halbkreis, welcher in 180 gleiche Theile oder Grade getheilt wird. Will man es noch genauer, so theilt man diese wieder in Minuten u. s. w. ein.

7. Soll nun ein Winkel mit dem Winkelmesser gemessen werden, so lege man den letztern mit seinem Mittelpunkte A (Fig. 165.), d. h. der Mitte des unten befindlichen Durchmessers, so auf den gegebenen Winkel, daß eben dieser Mittelpunkt auf die Spitze des Winkels und die eine Hälfte des genannten Durchmessers den einen (untern) Schenkel des gegebenen Winkels deckt, und zwar, wenn der Winkel links zu liegt, legt man den linken Theil des Durchmessers (den linken Halbmesser), liegt er rechts, den rechten Theil desselben auf den untern Schenkel des gegebenen Winkels. Deßhalb ist auch der Halbkreis doppelt eingetheilt, so nämlich, daß man sowohl von der rechten als linken Seite aus zählen kann. Liegt nämlich der Winkel rechts, d. h. sieht seine Spitze links, so zählt man in dem untern (kleinern) Kreise von der rechten Seite aufwärts, liegt er links, so zählt man von der linken Seite aufwärts und zwar in dem zweiten obern Kreise.

Der andere Schenkel des Winkels bezeichnet alsdann den Punkt, bis zu welchem die Grade gezählt werden müssen. So viel Grade der zwischen den beiden Schenkeln des Winkels liegende Bogen des Halbkreises hat, so viel Grade hat auch der Winkel. So mißt z. B. der im Transporteur rechts gezeichnete Winkel x genau 65°, der links liegende $\angle$ y aber 103°.

8. Ebenso läßt sich mit Hülfe des Transporteurs ein Winkel von gegebener Größe zeichnen. Soll nämlich ein Winkel, dessen Größe nach Graden gegeben ist, gezeichnet werden, so ziehe man zuerst einen Schenkel beliebig, nehme auf

demselben einen Punkt an, der die Spitze des Winkels werden soll, lege den Winkelmesser mit seinem Mittelpunkte an diese Spitze und mit dem Grenzhalbmesser an den Schenkel genau an, lese auf dem eingetheilten Halbkreise die Zahl der gegebenen Grade ab und merke den dadurch gefundenen Punkt des Halbkreises; ziehe nun von diesem Punkte eine Linie an die Spitze des zu suchenden Winkels, so ist diese Linie der andere Schenkel dieses Winkels.

§. 61.

Anleitung die nöthigsten bei dem Kreise vorkommenden Aufgaben zu construiren.

1. Einen Kreis zu beschreiben,
a. mit gegebenem Halbmesser:
a. der Mittelpunkt sei bestimmt;
(Die Auflösung dieser Aufgabe kam schon früher bei den Vorübungen zum Zeichnen vor (§. 9.).

b. 2 Punkte a und b, durch welche der Kreis gehen soll, seien gegeben;

Auflösung. Man beschreibe von a und b (Fig. 166.) aus mit dem gegebenen Halbmesser Bogen, die sich in c schneiden, so ist c der zu suchende Mittelpunkt des neuen Kreises.

b. der durch 3 gegebene Punkte a, b und c gehe.

1ste Auflösung. Verbinde je 2 Punkte, nämlich a und b (Fig. 167.) durch ab und b und c durch bc, errichte in den Halbirungspunkten dieser beiden Linien Perpendikel, welche sich in d schneiden, so ist dieser Durchschnittspunkt der verlangte Mittelpunkt, und die Entfernung d von irgend einem der 3 Punkte ist gleich dem Halbmesser des verlangten Kreises.

2te Auflösung. Man beschreibe von a und b aus (Fig. 168.) mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Bogen, die sich 2mal in m und n schneiden, ebenso suche man von a und c die Durchschnitte d und e, ziehe hierauf die Geraden nmo und def, so ist ihr Durchschnittspunkt g der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

2. Der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises soll gesucht werden.

1ste Auflösung. Ziehe 2 beliebige Chorden ab und cd (Fig. 169.), errichte in ihren Halbirungspunkten die Perpendikel

ef und gh, so ist der Durchschnittspunkt der letztern, nämlich o, der gesuchte Mittelpunkt.

Anm. Auf dieselbe Art wird auch der Mittelpunkt eines Kreisbogens gefunden.

2te Auflösung. Man ziehe eine beliebige Chorde ab (Fig. 170.), ziehe durch die Mitte derselben einen senkrechten Durchmesser cd, so ist der Halbirungspunkt desselben e zugleich der Mittelpunkt des gegebenen Kreises.

3te Auflösung. Ziehe eine beliebige Chorde ab (Fig. 171.), errichte in einem ihrer Endpunkte, z. B. in b, einen Perpendikel bc, welcher die Peripherie in c trifft, ziehe ac, so ist ihr Halbirungspunkt d der zu suchende Mittelpunkt des gegebenen Kreises.

4te Auflösung. Ziehe eine beliebige Chorde ab (Fig. 172.), errichte in den beiden Endpunkten a und b die beiden Perpendikel ac und bd, ziehe cb und da, so ist ihr Durchschnittspunkt e der Mittelpunkt des gegebenen Kreises.

3. Ein gegebener Kreisbogen soll vollendet werden.

Auflösung. Man suche zu demselben den Mittelpunkt und vollende den Kreis.

4. Ein Kreisbogen soll halbirt werden.

1ste Auflösung. Man beschreibe von den Endpunkten des Bogens mn (Fig. 173.) mit beliebigen aber gleichen Halbmessern auf beiden Seiten Kreuzbogen, verbinde deren Durchschnittspunkte q und p durch die Gerade pq, so halbirt diese den Bogen in o.

2te Auflösung. Man verbinde die beiden Endpunkte m und n (Fig. 174.) durch die Gerade mn, errichte im Halbirungspunkte derselben den Perpendikel cd, so wird dieser den gegebenen Bogen in e halbiren.

5. An einen bestimmten Punkt eines Kreises eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man verbinde den gegebenen Punkt b (Fig. 175.) mit dem Mittelpunkte des Kreises durch die Gerade ab, errichte auf dieser im Punkte b einen beliebigen Perpendikel bc, so ist dieser die verlangte Tangente.

6. Von einem gegebenen Punkte m außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

1ste Auflösung. Man verbinde den gegebenen Punkt m durch die Gerade mo (Fig. 178.) mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises, beschreibe von r aus — als Mittelpunkt dieser Linie — mit der Hälfte derselben einen Kreis, der den gegebenen Kreis in

q und p schneidet, ziehe die Geraden mq und mp, so sind beide Tangenten von dem letztern Kreise.

2te Auflösung. Ziehe mo (Fig. 179.) und beschreibe damit aus o einen Kreisbogen, errichte in n einen Perpendikel nr und verlängere ihn rückwärts bis s; verbinde die beiden Punkte r und s mit dem Mittelpunkte durch die Geraden ro und so, ziehe von m aus an p und q die geraden Linien mp und mq, so sind dieß die verlangten Tangenten.

3te Auflösung. Beschreibe von m aus mit ma (Fig. 176.) und von a aus mit dem Durchmesser Bogen, die sich in b schneiden; ziehe ab, welche den Kreis in d schneidet, ziehe endlich md, so ist dieß die verlangte Tangente.

7. Es sollen 2 Kreise, deren Halbmesser gegeben sind, so gezeichnet werden, daß sie einander von außen berühren.

Auflösung. Man ziehe (Fig. 177.) eine Gerade ab gleich der Summe der beiden Halbmesser, beschreibe von a aus mit dem einen und von b aus mit dem andern Halbmesser Kreise, so werden diese einander von außen in c berühren.

8. Man soll 2 Kreise mit gegebenen Halbmessern so zeichnen, daß sie einander von innen berühren.

Auflösung. Man ziehe (Fig. 180.) eine Linie ab gleich dem größern der gegebenen Halbmesser, schneide von a aus ein Stück ac gleich dem kleinern Halbmesser ab, beschreibe von b aus mit ba und von c aus mit ca Kreise, so werden sie sich in a berühren.

9. Man soll 3 Kreise so zeichnen, daß sie einander von außen berühren;

a. wenn alle drei Kreise gleiche Halbmesser haben:

Auflösung. Man beschreibe ein gleichseitiges △ abc (Fig. 181.), dessen eine Seite ab doppelt so groß ist als der gegebene Halbmesser; beschreibe von den 3 Winkelspitzen aus mit dem gegebenen Halbmesser 3 Kreise, so werden sich diese gegenseitig berühren.

b. wenn die 3 Halbmesser a, b und c ungleich sind.

Auflösung. Man setze je 2 Halbmesser, nämlich a und b = mn (Fig. 182.), a und c = mo, und b und c = no zusammen, bilde aus den so erhaltenen 3 Linien mn, no und mo ein △ mno, beschreibe von m aus mit a, von n aus mit b und von o aus mit c Kreise, so werden diese die verlangten Eigenschaften haben.

10. Zwischen die Schenkel eines Winkels oder überhaupt zwischen 2 ungleichlaufende Linien 2 oder mehrere Kreise so zu

zeichnen, daß diese sowohl die beiden Schenkel als auch 2 zunächstliegende Kreise einander berühren.

Auflösung. Man ziehe (Fig. 184.) die Halbirungslinie ad des gegebenen Winkels, nehme auf ad einen beliebigen Punkt e als Mittelpunkt des ersten Kreises an, fälle von e auf ab den Perpendikel ef, ziehe von e aus mit ef als Halbmesser den ersten Kreis M. Errichte im Punkte g den Perpendikel gh, schneide hi = gh ab, errichte auf ab in i den Perpendikel ik, beschreibe aus k mit ki den 2ten Kreis N. Errichte in l den Perpendikel lm, schneide mn = ml ab, errichte in n den Perpendikel no und beschreibe von o aus mit on den 3ten Kreis O u. s. f.

11. Man soll 2 gleiche Kreise, deren Halbmesser gegeben ist, so zeichnen, daß sie sich von außen berühren, und einen dritten — größern, welchen die beiden erstern von innen berühren.

Auflösung. Lege 2 Linien ab und bc (Fig. 183.), jede gleich dem gegebenen Halbmesser, so an einander, daß sie eine gerade Linie ac bilden; beschreibe von a und c aus mit dem gegebenen Halbmesser die Kreise M und N, und von b aus mit dem Halbmesser ac den Kreis O.

12. Ein Kreis sei gegeben, man soll in denselben 2 gleiche Kreise so zeichnen, daß sie nicht nur denselben von innen, sondern sich selbst auch von außen berühren.

Auflösung. Man ziehe einen Durchmesser ab (Fig. 185.), theile denselben durch die Theilungspunkte c, d und e in 4 gleiche Theile, beschreibe von c und e aus mit ac Kreise, so ist die Aufgabe gelöst.

13. Drei gleiche Kreise sollen gezeichnet werden, welche sich gegenseitig von außen berühren und um dieselben ein 4ter größerer, welcher von denselben von innen berührt wird.

Auflösung. Man zeichne ein gleichseitiges △ abc (Fig. 186.), beschreibe von jeder der 3 Ecken a, b und c aus mit der Hälfte einer Seite als Halbmesser die 3 gleichen Kreise N, O und M, ziehe von 2 Berührungspunkten zweier Kreise, etwa von d und e aus an die gegenüberliegende Spitze des Dreiecks die Linien eb und da, so werden sich diese in f schneiden; verlängere eine dieser Linien, z. B. eb bis an den Kreis, also hier bis g, und beschreibe von f aus mit fg einen Kreis, so ist dieß der verlangte größere Kreis.

14. Die Kreislinie in beliebig gleiche Theile zu theilen:
a. in 2 gleiche Theile;

Auflösung. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser (Fig. 187.), so wird durch diesen die Kreislinie halbirt.

b. in 3 gleiche Theile;

Auflösung. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser DE (Fig. 188.), beschreibe mit dem Radius DC aus D den Bogen ACB, so wird durch letztern und durch den Durchmesser der Kreis in die 3 gleichen Stücke AB, BE und EA getheilt.

c. in 4 gleiche Theile;

Auflösung. Ziehe 2 senkrecht auf einander stehende Durchmesser (Fig. 189.), so wird durch sie der Kreis in 4 gleiche Theile getheilt.

d. in 5 gleiche Theile;

Auflösung. Ziehe 2 senkrecht auf einander stehende Halbmesser AB und BF (Fig. 190.), halbire einen der Halbmesser AB in E, errichte auf AB in A den Perpendikel AC=AE=½AB, ziehe CB; beschreibe von C aus mit CA den Bogen AD und von B aus mit BD den Bogen DE, ziehe endlich FE, so theilt diese Linie den Kreis in 5 gleiche Theile.

e. in 6 gleiche Theile;

1ste Auflösung. Man trage den Radius 6mal im Kreise herum, so wird dadurch letzterer in 6 gleiche Theile getheilt (Fig. 191.).

2te Auflösung. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser AB (Fig. 192.), beschreibe von den beiden Endpunkten A und B aus mit dem Halbmesser Bogen, die den Kreis in C, F, E und D schneiden, so sind A, F, E, B, D und C die 6 Theilungspunkte.

f. in 7 gleiche Theile;

1ste Auflösung. Ziehe einen Radius AB (Fig. 193.), beschreibe aus A mit demselben einen Bogen, der die Peripherie in C und D schneidet, ziehe CD, so läßt sich die Hälfte derselben, nämlich CE oder ED, siebenmal im Kreise herumtragen.

2te Auflösung. Man ziehe einen beliebigen Halbmesser AB (Fig. 194.), errichte in dessen Halbirungspunkt C einen Perpendikel CD, so theilt dieser, auf dem Kreise herumgelegt, denselben in 7 gleiche Theile.

g. in 8 gleiche Theile;

Auflösung. Beschreibe 2 senkrecht auf einander stehende Durchmesser AB und CD (Fig. 195.), so wird, wie früher gezeigt wurde, der Kreis in 4 gleiche Theile getheilt. Man beschreibe nun von D, B und C aus mit beliebigen aber gleichen Halbmessern Bogen, die sich in E und F schneiden, ziehe durch E und den Mittelpunkt G eine Linie und verlängere sie nach H, ebenso

die FG nach J, so wird der Kreis durch die Punkte A, H, C, K, B, L, D und J in 8 gleiche Theile getheilt.

h. in 9 gleiche Theile;

Auflösung. Man ziehe 2 einander senkrecht durchschneidende Durchmesser ab und cd (Fig. 196.), beschreibe aus b mit dem Radius bm den Bogen gmc, dann aus a mit dem Radius ad den Bogen dh, ziehe hi, so läßt sich durch diese der Kreis in 9 gleiche Theile theilen.

i. in 10 gleiche Theile;

Auflösung. Ziehe 2 senkrecht auf einander stehende Halbmesser am und md (Fig. 197.), errichte im Punkte a auf am den Perpendikel ac = $^1/_2$ am, ziehe cm, schneide von cm ein Stück cf = ac ab, so ist mf die Linie, welche den Kreis in 10 gleiche Theile theilt.

k. in 11 gleiche Theile;

Auflösung. Man ziehe 2 senkrecht einander durchschneidende Durchmesser ab und cd (Fig. 198.), beschreibe von b aus mit dem Radius bm den Kreisbogen hmf, ziehe bf, beschreibe aus f mit dem Halbmesser fm den Bogen mk, verbinde k mit g, so läßt sich gl 11mal auf die Peripherie tragen.

l. in 12 gleiche Theile;

Auflösung. Man beschreibe 2 senkrecht einander durchschneidende Durchmesser AB und CD (Fig. 199.), beschreibe mit dem Halbmesser AM aus A, B, C und D Bogen, so wird dadurch der Kreis in 12 gleiche Theile getheilt.

m. in jede beliebige Anzahl gleicher Theile;

Auflösung. Man theile den Durchmesser AB in so viel gleiche Theile, als die Peripherie getheilt werden soll, z. B. hier in 7 Theile (Fig. 200.), beschreibe sodann von den beiden Endpunkten A und B aus mit AB Bogen, die sich in C und D schneiden. Aus den Punkten C und D ziehe durch die Theilungspunkte 2, 4 und 6 die geraden Linien Ca, Cb und Cc, ebenso Dd, De und Df, so wird dadurch die Peripherie in 7 gleiche Theile getheilt.

15. Eine gegebene Kreisfläche in eine bestimmte aber gerade Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile einen Durchmesser ab in doppelt so viele gleiche Theile, als die Kreisfläche getheilt werden soll, z. B. hier, da der Kreis 4 gleiche Theile erhalten soll, in 2.4=8 gleiche Theile (Fig. 201.), beschreibe vom 1sten Theilungspunkte

aus mit einem Theil als Halbmesser, vom 2ten Theilungspunkte mit 2 Theilen, vom 3ten mit 3 Theilen Bogen; dann vom 7ten Theilungspunkte mit einem Theil, vom 6ten mit 2 Theilen bis vom 5ten mit 3 Theilen, so wird dadurch die Kreisfläche in 4 gleiche Theile getheilt.

16. Eine gegebene Kreisfläche durch gleiche Bogen in jede beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile die Peripherie in so viel gleiche Theile, als man den Kreis getheilt haben will, z. B. hier in 8 (Fig. 202.), ziehe an die 8 Theilungspunkte a, b, c, d, e, f, g und h Halbmesser und beschreibe über denselben Halbkreise, so wird dadurch der Kreis in die verlangten gleichen Theile getheilt.

§. 62.

Aufgaben zum Zeichnen.

1. Eine Kreislinie soll beschrieben werden, deren Halbmesser gegeben ist.
2. Man soll eine punktirte Kreislinie beschreiben, deren Mittelpunkt und Durchmesser gegeben sind.
3. Eine gerade Linie sei gegeben, man soll über derselben einen Halbkreis beschreiben.
4. Eine Kreislinie sei gegeben, man soll den Mittelpunkt dazu finden (viererlei Auflösungen).
5. Drei in nicht gerader Linie liegende Punkte seien gegeben, man soll durch dieselben auf zweierlei Arten einen Kreis beschreiben.
6. Zwei Punkte seien gegeben, man soll durch dieselben mit einem gegebenen Halbmesser eine Kreislinie beschreiben.
7. Es sollen 2 gleiche Kreise gezeichnet werden, welche eine gemeinschaftliche Chorde haben.
8. An einen gegebenen Kreis soll eine Tangente gezogen werden.
9. Eine Kreislinie und auf dieser ein Punkt seien gegeben, man soll an letztern eine Tangente ziehen.
10. Von einem gegebenen Punkte aus außerhalb eines Kreises soll an diesen eine Tangente gezogen werden.
11. In einen Kreis sollen auf gleichem Bogen ein Centri- und ein Peripherie-Winkel gezeichnet werden und zwar so, daß die Spitze des Centriwinkels entweder auf einen Schenkel des Peripheriewinkels falle, oder außer- oder innerhalb der Schenkel desselben.
12. Man soll 2 Kreise, deren Halbmesser gleich sind, so zeichnen, daß sie sich von außen berühren.
13. Die 2 Halbmesser zweier Kreise sind gegeben, man soll die Kreise so zeichnen, daß sie sich von außen berühren.
14. Es sollen 2 Kreise, deren Halbmesser gegeben sind, so gezeichnet werden, daß sie sich von innen berühren.

15. Man soll 2 Kreise zeichnen, deren Halbmesser sich zu einander verhalten wie 2 : 1, und welche einander von innen berühren.

16. Zeichnet acht Kreise, welche sich von innen berühren.

17. Dieselbe Uebung, nur daß der gemeinschaftliche Berührungspunkt auf der entgegengesetzten Seite ist.

18. Verbindung von Nro. 16. und 17.

19. Man soll drei gleiche Kreise so zeichnen, daß sie sich von außen berühren.

20. Von drei ungleichen Kreisen seien die Halbmesser gegeben, man soll die ersteren so zeichnen, daß sie sich von außen berühren.

21. In einen gegebenen Kreis sollen zwei gleiche Kreise so beschrieben werden, daß sich die letztern von außen, jeder derselben aber den ersteren von innen berührt.

22. Dieselbe Uebung, nur daß statt der ganzen Kreise nur Halbkreise gezeichnet werden.

23. Zeichnet vier Kreise, wovon jedesmal einer den nebenliegenden von außen berührt, und bei denen der Halbmesser des nächstfolgenden immer um ein bestimmtes Stück größer ist.

24. Dieselbe Uebung, nur daß der Halbmesser des nächstfolgenden Kreises immer die Hälfte des vorhergehenden ist.

25. Dieselbe Uebung nach beiden Seiten.

26. Von einem gegebenen Mittelpunkte aus sollen mehrere concentrische Kreise in gleichen Entfernungen gezogen werden.

27. Man soll vier concentrische Kreise so ziehen, daß die Entfernung des dritten vom zweiten das Doppelte ist von der des zweiten vom ersten und die des vierten wieder die doppelte Entfernung des dritten vom zweiten ist.

28. Theilet eine beliebige gerade Linie in zwei gleiche Theile, beschreibet nicht nur über jedem Theile, sondern auch über der ganzen Linie Halbkreise.

29. Ziehet eine wagrechte Linie, theilet dieselbe in drei gleiche Theile, beschreibet von beiden Theilungspunkten aus auf derselben Seite mit einem Theile als Halbmesser zwei Halbkreise.

30. Dieselbe Uebung, nur daß der eine Halbkreis ober- und der andere unterhalb der Linie ist.

31. Zeichnet eine wagrechte Linie, theilet sie in vier gleiche Theile, beschreibet auf derselben Seite je über einem Theile einen Halbkreis.

32. Dieselbe Uebung, nur mit dem Unterschiede, daß der eine Halbkreis über, der andere unter seinem Durchmesser ist (eine Schlangenlinie).

33. Ziehet eine andere Schlangen- oder Wellenlinie mit sechs gleichen Krümmungen.

34. Führet diese Uebung doppelt aus, indem, wenn zuerst eine Schlangenlinie aufwärts anfängt, man über derselben Linie eine andere abwärts zeichnet.

35. Theilet eine Gerade in neun gleiche Theile, beschreibet vom

zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Theilungspunkte aus mit einem Theile als Halbmesser über der Linie Halbkreise, ebenso vom ersten, dritten, fünften u. s. w. Theilungspunkte aus unter der Linie Halbkreise.

36. Theilet eine gerade Linie in beliebig gleiche Theile, ziehet von einem jeden Theilungspunkt aus mit einem Theile als Halbmesser Halbkreise.

37. Dieselbe Uebung, nur daß der nachfolgende Bogen den vorhergehenden nicht schneide, sondern nur berühre.

38. Es sollen ungleiche Schlangenlinien gezeichnet werden, indem man eine Linie in ungleiche und zwar solche Theile theilt, daß der nächstfolgende immer um ein gleiches Stück größer oder kleiner werde als das vorhergehende, und über jedem Theile bald über bald unter denselben Halbkreise beschreibt.

39. Zeichnet mehrere gleiche Kreise so, daß der nächstfolgende immer durch den Mittelpunkt des vorhergehenden gehe.

40. Dieselbe Uebung, nur daß der zweite, vierte u. s. w. Kreis zum Theil versteckt sind.

41. Dieselbe Uebung, aber so, daß immer ein Kreis auf dem andern zu liegen scheint.

42. Eine gegebene Kreisfläche soll durch ungleiche Bogen in acht gleiche Theile getheilt werden.

43. Theilet einen Kreis durch gleiche Bogen in sieben gleiche Theile.

44. Bildet selbst Zusammensetzungen aus Kreisen und Kreisbogen.

Anhang.

Kurze Sätze zur Wiederholung.

Erster Abschnitt.

(§. 1 — 18.)

Der Punkt und die gerade Linie.

1. Die Bezeichnung eines Ortes oder einer Stelle nennt man *Punkt*.

2. Ein Punkt hat *keine Ausdehnung*, also auch *keine Größe*.

3. Punkte können sich bloß durch ihre *Lage* von einander unterscheiden.

4. Der gezeichnete (physische) Punkt ist bloß ein Bild des wirklichen (mathematischen) Punktes.

5. Der Weg, den ein bewegter Punkt zeichnet, ist eine *Linie*.

6. Die Linie hat nur *eine* Ausdehnung in die *Länge*.

7. Es giebt *gerade* und *krumme* Linien.

8. Eine Linie ist gerade, wenn sie überall dieselbe Richtung beibehält, krumm, wenn sie stets ihre Richtung verändert.

9. Eine Linie kann *begrenzt* oder *unbegrenzt* sein.

10. Eine begrenzte gerade Linie hat einen *Anfangs-* und einen *Endpunkt*.

11. Die Grenzen der Linien sind Punkte.

12. Es giebt 6 *Hauptrichtungen*, nämlich: rechts und links, aufwärts und abwärts, vorwärts und rückwärts; die 2 letzteren lassen sich jedoch auf dem Papier nicht leicht darstellen.

13. Die *Nebenrichtungen* sind: rechts aufwärts, links aufwärts, rechts abwärts, links abwärts.

14. *Wagrecht* (wasserrecht) nennt man das, was die Richtung eines stillstehenden Wassers oder eines gleichstehenden Wagbalkens hat, *lothrecht* dagegen das, was die Richtung einer an einer Schnur frei hängenden Bleikugel hat.

15. Zwei Punkte können nur in *einer* Richtung, dagegen können 3 oder mehrere Punkte entweder in *einer* oder in *mehreren* Richtungen liegen.

16. Die Entfernung zweier Punkte wird durch die dazwischen liegende gerade Linie bestimmt.

17. Punkte können entweder *gleiche* oder *ungleiche* Entfernung haben in Beziehung auf andere Punkte.

18. Unter der Größe einer Linie versteht man die Größe der Entfernung ihrer Endpunkte.

19. Gerade Linien können gleich oder ungleich (groß) sein.

20. Gleiche Linien decken einander, und Linien, die einander decken, sind gleich.

21. Durch die beiden Endpunkte ist die Größe einer geraden Linie bestimmt.

22. Eine Linie kann größer gemacht, d. h. verlängert, oder kleiner gemacht (verkleinert oder verkürzt) werden.

23. Die Vergrößerung oder Verkleinerung einer geraden Linie ist entweder eine gleichmäßige oder eine ungleichmäßige.

24. Das Zeichen der Gleichheit ist: $=$.

25. Wie Zahlen, so können auch gerade Linien addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden.

26. Es giebt senkrechte, wagrechte und schiefe Linien.

27. Durch einen Punkt ist die Richtung einer Linie nicht bestimmt, wohl aber durch 2 Punkte.

28. Durch die beiden Endpunkte ist eine gerade Linie ihrer Größe und Lage (Richtung) nach, also vollkommen bestimmt.

29. Ungleichlaufende Linien sind solche, welche — gehörig verlängert — zusammentreffen, gleichlaufende oder Parallellinien, welche nie zusammentreffen.

30. Die ungleichlaufenden Linien sind theils Linien von einerlei Richtung, theils von verschiedenen Richtungen (ungleichlaufend im engern Sinne).

31. Die letzteren sind entweder zusammenlaufend (convergirend) oder auseinanderlaufend (divergirend).

32. Man erhält die höchste Anzahl von Durchschnittspunkten zwischen einer Anzahl gerader Linien, wenn man die Anzahl der letzteren mit der um 1 verminderten Zahl multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt.

33. Um die höchste Anzahl gerader Linien zu finden, welche zwischen einer bestimmten Anzahl von Punkten möglich sind, multiplicire man die Anzahl der Punkte mit der um 1 verminderten Zahl und dividire das Produkt durch 2.

34. Eine Linie messen heißt: untersuchen, das Wievielfache oder der wievielte Theil diese Linie von einer bestimmten Linie, welche als Einheit angenommen und Schuh oder Fuß genannt wird, sei.

35. Es gibt zweierlei Längenmaße: das Duodecimalmaß und das Decimalmaß. Nach dem erstern ist $1^0 = 16'$, $1' = 12''$, $1'' = 12'''$; nach dem letztern ist $1^0 = 10'$, $1' = 10''$, $1'' = 10'''$.

Zweiter Abschnitt.

Der Winkel.

(§. 19—28.)

1. Unter Winkel versteht man den Unterschied zwischen den Richtungen zweier von einem Punkte auslaufenden geraden Linien.

2. Die Linien, welche einen Winkel bilden heißen die Schenkel desselben.

3. Bei einem Winkel kann man unterscheiden: die Schenkel, die Spitze oder den Scheitel und den Winkelraum.

4. Ein Winkel wird entweder durch einen oder 3 Buchstaben bezeichnet.

5. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge seiner Schenkel, sondern von der größern oder geringern Neigung der Schenkel ab.

6. Geradlinige Winkel sind solche Winkel, deren Schenkel gerade Linien, krummlinige Winkel, deren Schenkel krumme Linien sind, gemischtlinige aber solche, deren einer Schenkel eine gerade, der andere aber eine krumme Linie ist.

7. Rechte Winkel sind solche Winkel, deren einer Schenkel zu dem andern dieselbe Neigung hat wie zu der Verlängerung des letztern.

8. Stumpfe Winkel sind solche Winkel, deren Schenkel sich von einander neigen, also kleiner als 2 R und größer als R sind, und spitze dagegen solche, deren Schenkel sich zu einander neigen, oder welche kleiner sind als R.

9. Hohle oder konkave Winkel sind solche Winkel, welche größer als 0 und kleiner als 2 R sind; zu dieser Klasse von Winkeln gehören also die rechten, spitzen und stumpfen Winkel.

10. Ist ein Winkel gleich 2 R, bilden also seine Schenkel eine gerade Linie, so heißt er ein gestreckter oder ebener Winkel.

11. Ein Winkel, der größer als 2 R und kleiner als 4 R ist, heißt ein erhabener oder konvexer Winkel.

12. Unter benachbarten Winkeln versteht man solche Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide äußeren Schenkel eine gebrochene Linie bilden; liegen letztere aber in gerader Linie, so heißen die Winkel Nebenwinkel.

13. Wenn 2 Winkel einander so gegenüber liegen, daß die Schenkel des einen Winkels Verlängerungen der Schenkel des andern Winkels sind, so heißen solche Winkel Scheitelwinkel.

14. Liegen 2 Winkel auf derselben Seite einer Linie, welche 2 andere Parallellinien durchschneidet, so daß je einer an einer der letztern liegt, so heißen solche Winkel Gegenwinkel; liegen sie aber, unter übrigens gleichen Umständen, auf beiden Seiten der durchschneidenden Linie, so heißen solche Winkel Wechselwinkel.

15. Da der rechte Winkel eine bestimmte Größe hat, also alle rechten Winkel einander gleich sind, so wird derselbe als Maß der geradlinigen Winkel angenommen.

16. Man theilt den rechten Winkel in 90 Grade, jeden dieser in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden.

17. Eine Linie heißt senkrecht, wenn sie mit einer andern rechte, und schief, wenn sie schiefe Winkel bildet.

18. Die Ergänzung eines Winkels zu einem rechten Winkel heißt sein Complement, die zu 2 R sein Supplement.

19. Wenn ein Winkel so groß ist als 2 oder mehrere andere Winkel, so sagt man, er sei gleich der Summe dieser letztern.

20. Das, um was ein Winkel größer oder kleiner ist als ein zweiter Winkel, nennt man die Differenz der beiden Winkel.

21. Wenn ein Winkel 2=, 3=, 4= u. s. w. mal so groß ist als ein anderer, so sagt man er sei ein Produkt des letztern.

22. Jeder Winkel läßt sich in gleiche und in ungleiche Theile theilen.

23. Man findet die höchste Anzahl der Winkel, welche durch den Durchschnitt einer bestimmten Anzahl gerader Linien entstehen, wenn man die Anzahl der Linien mit der um 1 verminderten Zahl multiplicirt und dieses Produkt doppelt nimmt.

Dritter Abschnitt.

Die Figur überhaupt.

(§. 29—35.)

1. Eine Figur ist eine nach allen Seiten begrenzte Fläche.

2. Um eine Fläche vollständig zu begrenzen, sind wenigstens 3 Linien nothwendig.

3. Die eine Figur einschließenden Linien heißen Seiten derselben.

4. Bei einer Figur kann man unterscheiden: den Raum, die Seiten, die Winkel und die Ecken.

5. Eine Figur hat genau so viel Winkel und Ecken, als sie Seiten hat.

6. Ein Außenwinkel ist ein solcher Winkel, der außerhalb einer Figur ist und zwar so, daß eine Seite derselben den einen und die Verlängerung der anliegenden Seite den andern Schenkel bildet.

7. An einer Figur lassen sich im höchsten Falle zweimal so viel Außenwinkel bilden, als dieselbe Ecken hat.

8. Die Summe aller eine Figur einschließenden Seiten heißt der **Umfang** (Perimeter) der Figur.

9. Bei einer gleichseitigen Figur ist, wenn der Umfang mit U, eine Seite mit s und die Anzahl der Seiten mit n bezeichnet wird,

$$U = ns, \; s = \frac{U}{n}, \; n = \frac{U}{s}.$$

10. Gleichseitige Figuren, deren Seiten gegenseitig gleich sind, verhalten sich dem Umfange nach wie ihre Seitenzahl.

11. Haben aber gleichseitige Figuren gleichen Umfang, so verhalten sich ihre Seiten zu einander umgekehrt wie ihre Seitenzahl.

12. Figuren, welche gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, heißen **reguläre** oder **regelmäßige** Figuren, ist dieß nicht der Fall, **irreguläre** oder **unregelmäßige**.

13. Unter **Diagonale** versteht man diejenige gerade Linie, welche die Spitze zweier nicht unmittelbar auf einander folgenden Winkel verbindet, unter **Halbdiagonale** aber diejenige gerade Linie, welche von einem innerhalb der Figur liegenden Punkte an irgend eine Winkelspitze gezogen wird.

14. Man erhält die höchste Anzahl von Diagonalen, welche sich von **einer** Ecke aus ziehen lassen, wenn man von der Anzahl der Ecken **drei** abzieht; dagegen erhält man die höchste Anzahl aller möglichen Diagonalen, wenn man die um **drei** verminderte Anzahl der Seiten mit der Zahl selbst multiplicirt und das Produkt durch **zwei** dividirt.

15. Halbdiagonalen lassen sich in jeder Figur so viele ziehen, als diese Seiten oder Ecken hat.

16. Figuren, welche **gleichen Inhalt** haben, sind einander **gleich**; Figuren, welche **gleiche Form** haben, sind einander **ähnlich**, und Figuren, welche sowohl **gleichen Inhalt** als **gleiche Form** haben, sind **congruent**.

Vierter Abschnitt.

Das Dreieck.

(§. 36—44.)

1. Ein Dreieck ist eine von 3 Seiten begrenzte Figur.

2. Das Dreieck ist die einfachste aller geradlinigen Figuren.

3. **Gleichseitige** Dreiecke sind solche Dreiecke, welche 3 gleiche Seiten haben; sind bloß 2 Seiten gleich, so heißen sie **gleichschenklige** und sind alle 3 Seiten ungleich — **ungleichseitige** Dreiecke.

4. Hat ein Dreieck einen rechten Winkel, so heißt es rechtwinklig, hat es einen stumpfen, stumpfwinklig, und sind alle 3 Winkel spitze, spitzwinklig.

5. In jedem Dreieck nimmt man eine Seite als Grundlinie an; die der Grundlinie gegenüberliegende Winkelspitze heißt die Spitze, und der von dieser auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Höhe des Dreiecks.

6. Jedes Dreieck kann dreierlei Grundlinien, also auch dreierlei Höhen haben.

7. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist immer die ungleiche Seite die Grundlinie.

8. In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse, die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten aber die Katheten des Dreiecks.

9. Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke von dem rechten Winkel auf die Hypotenuse ein Perpendikel gefällt wird, so heißt dieser vorzugsweise die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks und die durch denselben von der Hypotenuse abgeschnittenen Stücke die Segmente derselben.

10. In einem Dreieck läßt sich keine Diagonale ziehen.

11. Bei einem Dreiecke lassen sich im höchsten Falle 6 Außenwinkel bilden.

12. Diejenigen 2 Winkel in einem Dreiecke, welche keine Nebenwinkel zu einem Außenwinkel sind, heißen in Beziehung auf den letztern gegenüberliegende Winkel.

Fünfter Abschnitt.

Das Parallelogramm.

(§. 45—52.)

1. Vierecke mit 2 Paar Parallellinien nennt man Parallelogramme; haben sie bloß ein Paar Parallellinien, so heißen sie Trapeze (Paralleltrapeze), und haben sie gar keine Parallellinien — Trapezoide (Trapeze).

2. Es giebt gleichseitige und ungleichseitige Parallelogramme; bei jenen sind alle 4 Seiten einander gleich, bei diesen bloß 2, und zwar immer die gegenüberliegenden.

3. Es giebt rechtwinklige oder solche Parallelogramme, bei welchen alle Winkel rechte Winkel sind, und schiefwinklige — mit 2 stumpfen und 2 spitzen Winkeln.

4. Gleichseitig-rechtwinklige Parallelogramme heißen Quadrate,

gleichseitig-schiefwinklige — **Rhombus**, ungleichseitig-rechtwinklige — **Rechtecke** und ungleichseitig-schiefwinklige — **Rhomboiden**.

5. Ein Quadrat ist bestimmt durch **eine** Seite, ein Rhombus durch eine Seite und einen Winkel, ein Rechteck durch die 2 einen rechten Winkel einschließenden Seiten und eine Rhomboide durch die beiden ungleichen Seiten und einen Winkel.

6. In einem Parallelogramme lassen sich entweder 1 oder 2 Diagonalen ziehen.

7. Nimmt man in einem Parallelogramme eine Seite als **Grundlinie** an, so sind alle von der gegenüberliegenden Seite auf diese gefällten Perpendikel die **Höhe** des Parallelogramms.

8. Bei einem rechtwinkligen Parallelogramme ist, wenn eine Seite als Grundlinie angenommen wird, die anliegende Seite die Höhe des Parallelogramms; beim Quadrate sind also Grundlinie und Höhe gleich.

9. In einem gleichseitigen Parallelogramme verhält sich der Umfang zu einer Seite wie 4 : 1.

10. In einem ungleichseitigen Parallelogramme ist die Summe der beiden ungleichen Seiten immer gleich der Hälfte des Umfanges.

Sechster Abschnitt.

Der Kreis.

(§. 53—62.)

1. **Kreislinie** oder **Peripherie** ist eine solche in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, welche von einem innerhalb derselben liegenden Punkte überall gleiche Entfernung hat.

2. Der Punkt im Kreise, welcher von allen Punkten der Kreislinie gleichweit entfernt ist, heißt **Centrum** oder **Mittelpunkt**.

3. Eine Kreislinie hat keinen Anfangs- und keinen Endpunkt.

4. Eine Linie, welche man sich vom Mittelpunkte aus an die Kreislinie gezogen denkt, heißt **Halbmesser** oder **Radius**.

5. Alle Halbmesser in demselben Kreise sind einander gleich.

6. Ein Kreis ist der **Lage** nach gegeben, wenn man seinen Mittelpunkt kennt, und seiner **Größe** nach, wenn der **Halbmesser** bekannt ist.

7. Irgend ein Stück der Kreislinie heißt **Kreisbogen** oder kurz **Bogen**.

8. Die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche heißt **Kreisfläche**; sie ist also eine solche einseitige Figur, deren Grenzlinie

in allen ihren Punkten von einem in ihr liegenden Punkte gleichweit entfernt ist.

9. Jeder Punkt außerhalb der Peripherie ist weiter, und jeder Punkt innerhalb derselben ist näher am Mittelpunkte als die Peripherie selbst.

10. Zwei Kreise sind einander gleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

11. Halbmesser in demselben Kreise können nie parallel sein.

12. Zwei Halbmesser, die mit einander eine gerade Linie bilden, heißt man Durchmesser des Kreises.

13. Ein Durchmesser ist doppelt so groß als ein Halbmesser in dem nämlichen Kreise.

14. Alle Durchmesser im nämlichen Kreise sind einander gleich.

15. Jeder Durchmesser theilt sowohl die Kreisfläche als die Peripherie in 2 gleiche Theile.

16. Eine gerade Linie, welche einen Kreis in 2 Punkten berührt, deren Endpunkte also in der Peripherie liegen, heißt Sehne oder Chorde.

17. Geht eine Sehne zugleich durch den Mittelpunkt, so wird sie zum Durchmesser.

18. Ist eine Linie von der Eigenschaft, daß sie den Kreis bloß von außen berührt, also selbst, wenn man sie verlängern würde, mit dem Kreis nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, so heißt eine solche Linie Tangente oder Berührungslinie.

19. Eine Sekante oder Schneidungslinie ist eine solche gerade Linie, welche den Kreis in 2 Punkten schneidet.

20. Centri- oder Mittelpunktswinkel sind solche Winkel im Kreise, deren Spitze im Mittelpunkte desselben ist und deren Schenkel Halbmesser sind.

21. Peripheriewinkel nennt man solche Winkel im Kreise, die ihre Spitze in der Peripherie haben und deren Schenkel Chorden sind.

22. Sowohl Centri- als Peripheriewinkel stehen auf dem Bogen, der zwischen ihren Schenkeln liegt.

23. Ein Peripheriewinkel, dessen beide Schenkel auf den Endpunkten des Durchmessers aufstehen, heißt ein Winkel im Halbkreis.

24. Dasjenige Stück einer Kreisfläche, das von einer Chorde und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt Kreisabschnitt oder Segment.

25. Unter Kreisausschnitt oder Sector versteht man dasjenige Stück einer Kreisfläche, das von 2 Halbmessern, die nicht in gerader Linie liegen, und dem dazwischen befindlichen Bogen begrenzt wird.

26. Eine Sehne theilt eine Kreisfläche in 2 ungleiche Stücke, wovon das eine der größere und das andere der kleinere Kreisabschnitt heißt.

27. Concentrische Kreise sind solche Kreise, welche denselben

Mittelpunkt haben, excentrische, welche verschiedene Mittelpunkte haben.

28. Kreise berühren einander, wenn sie nur einen Punkt mit einander gemeinschaftlich haben.

29. Kreise können einander von außen und von innen berühren.

30. Diejenige Linie, welche die Mittelpunkte zweier Kreise verbindet, heißt Centrallinie.

31. 2 Kreise berühren einander von außen, wenn die Centrallinie gleich der Summe, und von innen, wenn dieselbe gleich der Differenz der beiden Halbmesser ist.

32. Der Raum zwischen 2 concentrischen Kreisen heißt concentrischer Ring oder kurz Ring.

33. Winkel werden durch die ihnen zugehörigen Bogen gemessen.

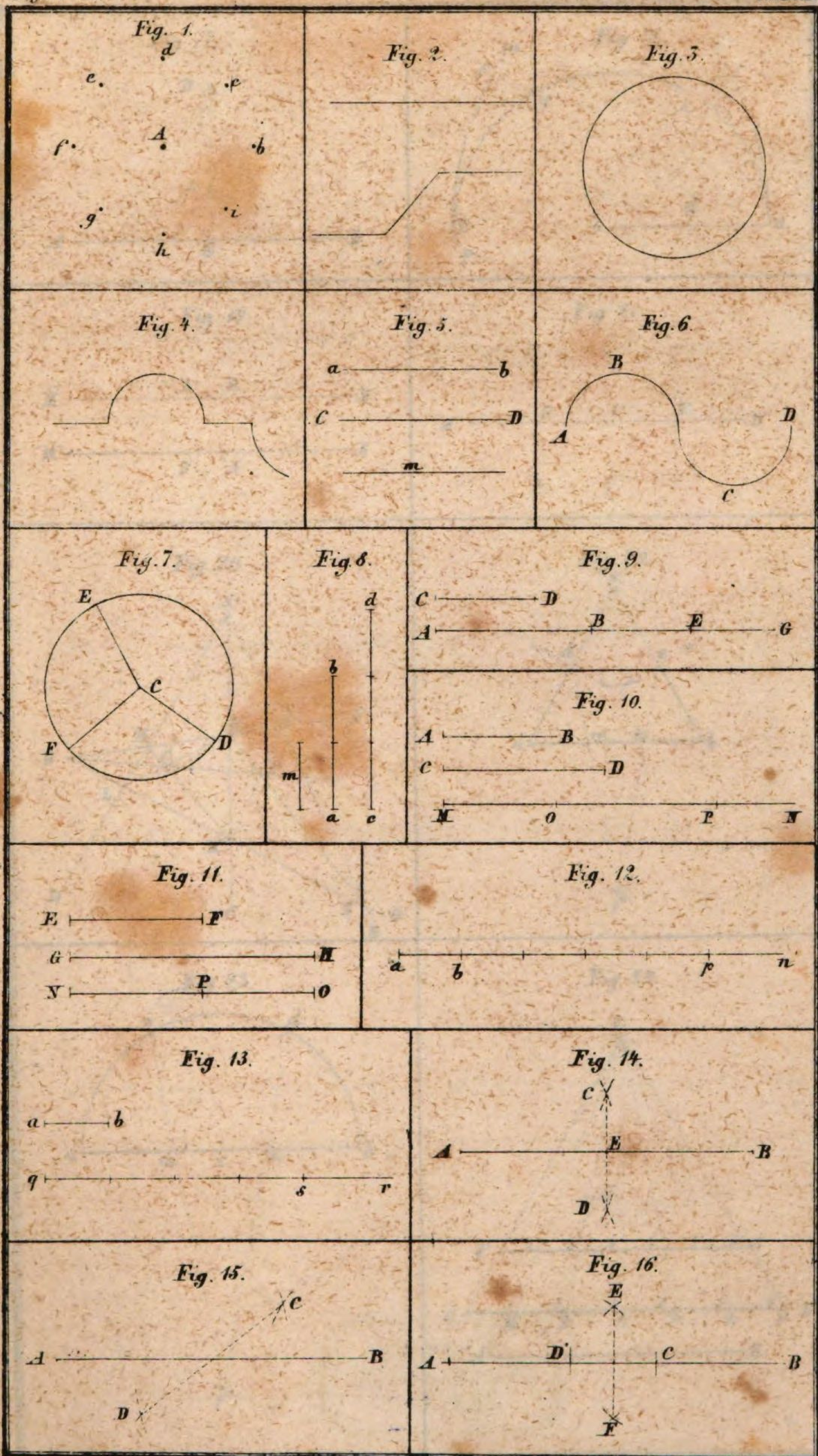

Fig. 1.
d
e.
c
A.
f.
b
g.
i
h
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
a
b
C
D
m
Fig. 6.
B
A
D
C
Fig. 7.
E
C
F
D
Fig. 8.
d
b
m
a
c
Fig. 9.
C
D
A
B
E
G
Fig. 10.
A
B
C
D
M
O
P
N
Fig. 11.
E
F
G
H
N
P
O
Fig. 12.
a
b
p
n
Fig. 13.
a
b
q
s
r
Fig. 14.
C
A
E
B
D
Fig. 15.
C
A
B
D
Fig. 16.
E
A
D
C
B
F

Fig 17.

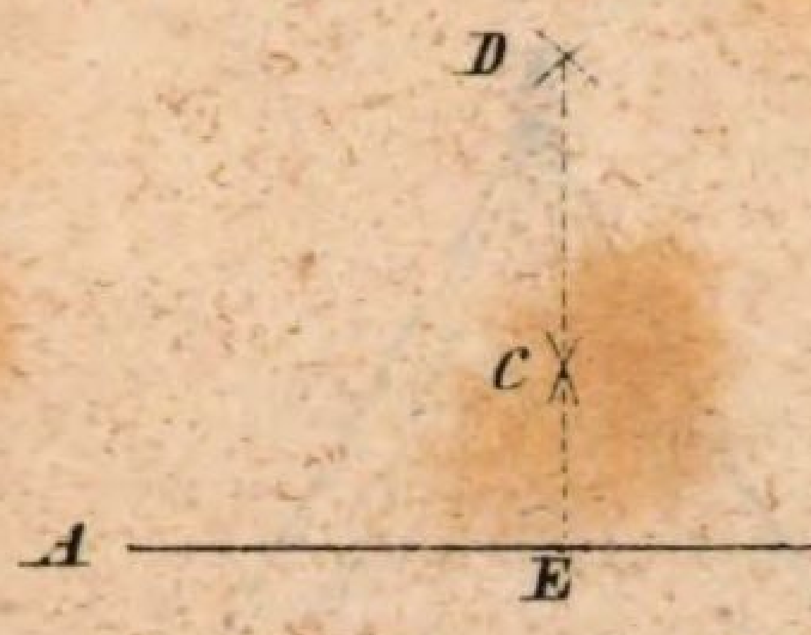


Fig. 18.

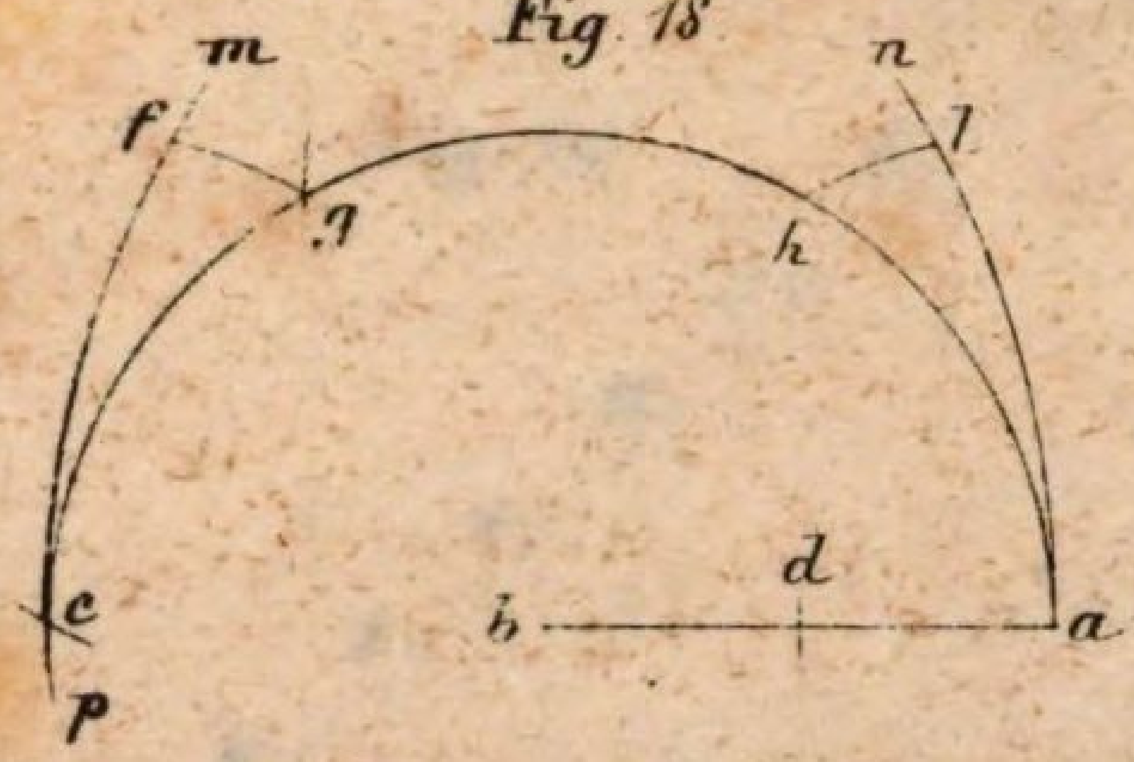


Fig. 19.

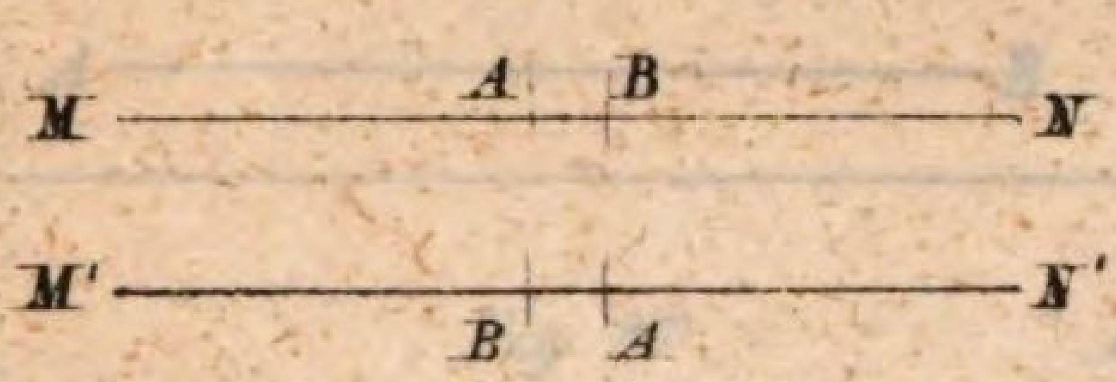


Fig 21.

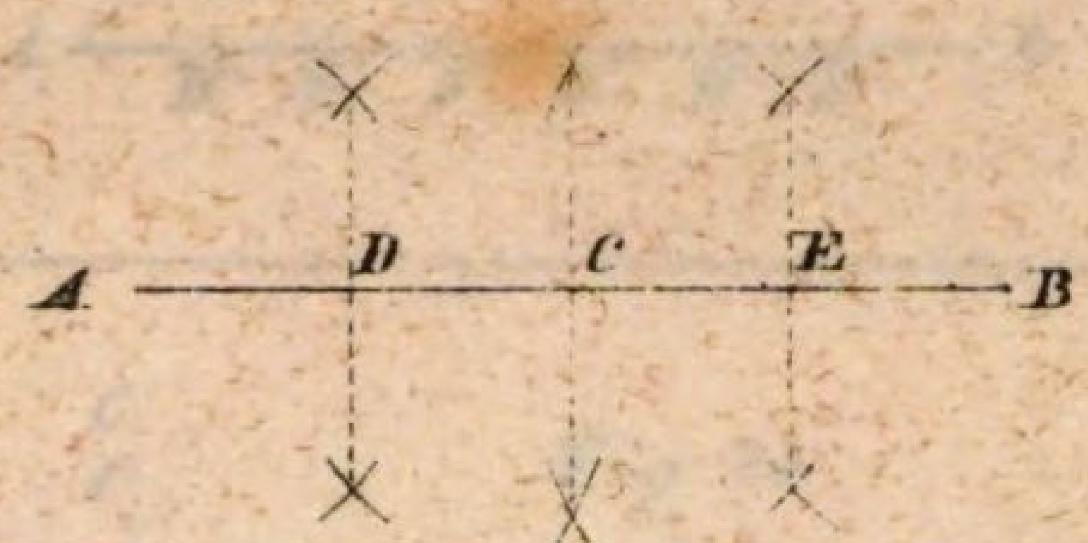


Fig 20.

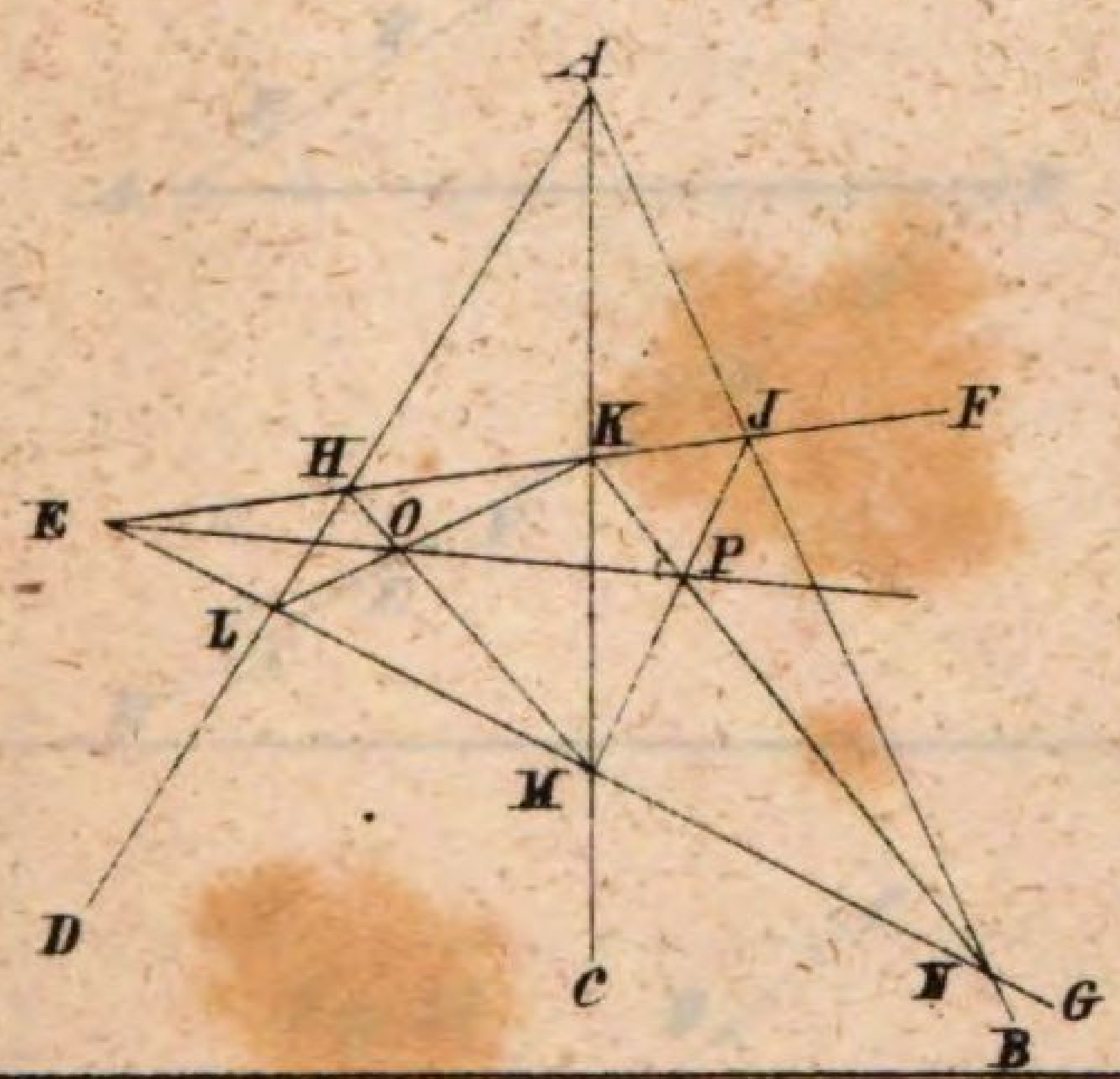


Fig 22.

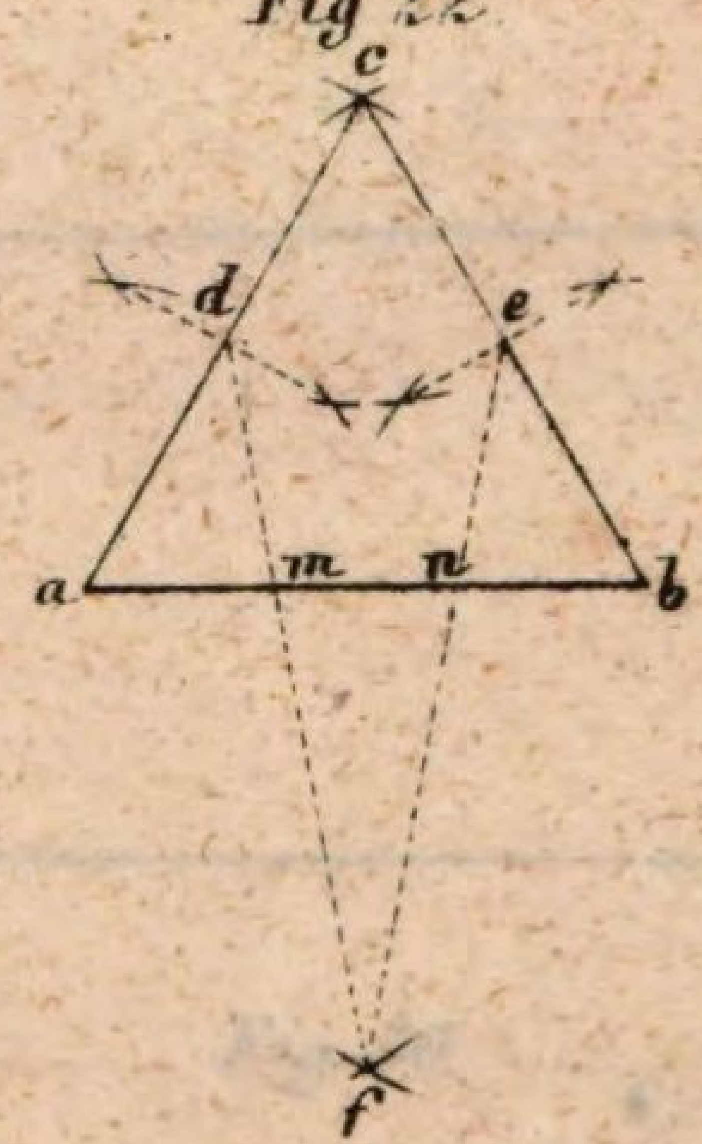


Fig 23.

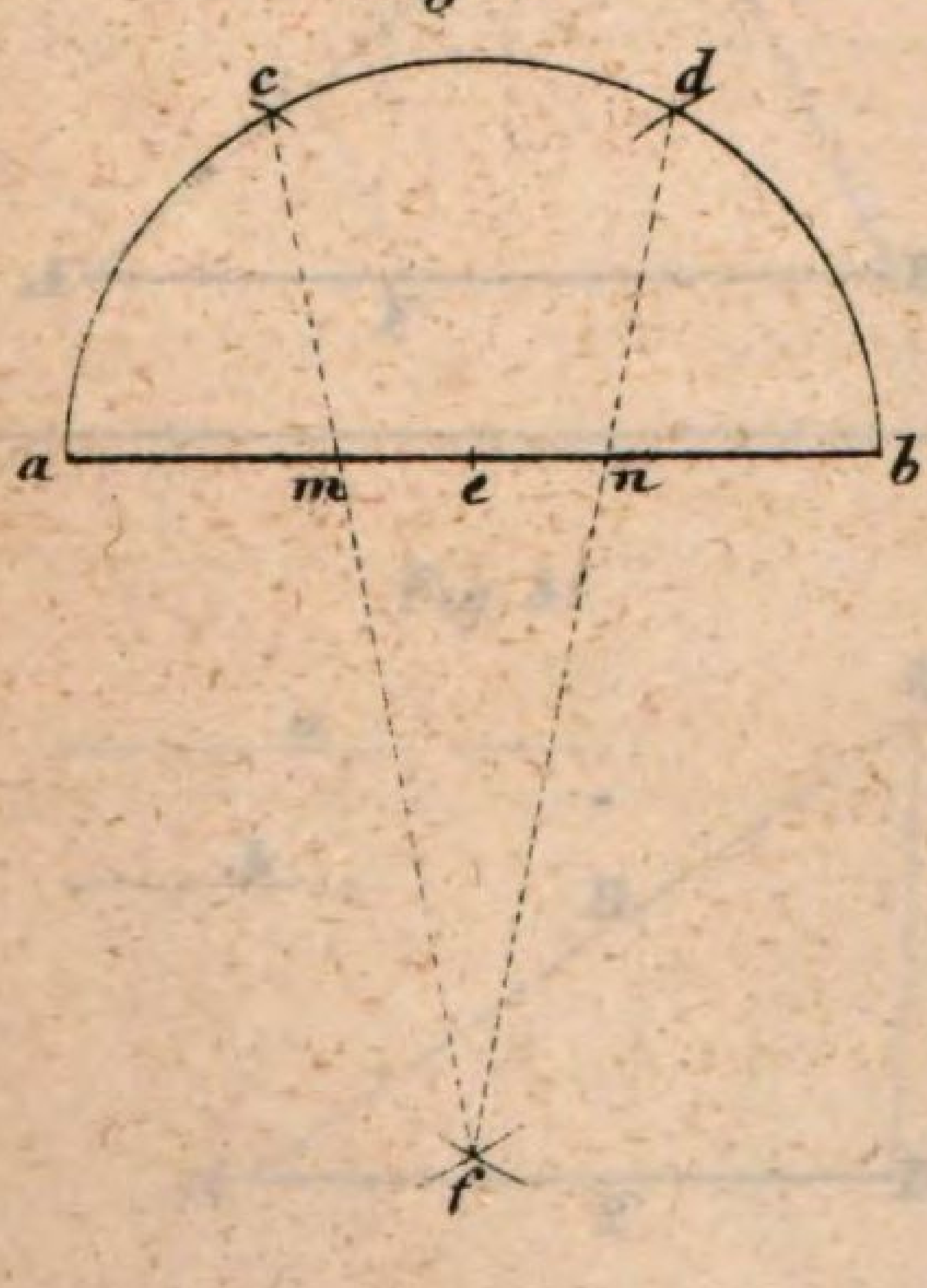
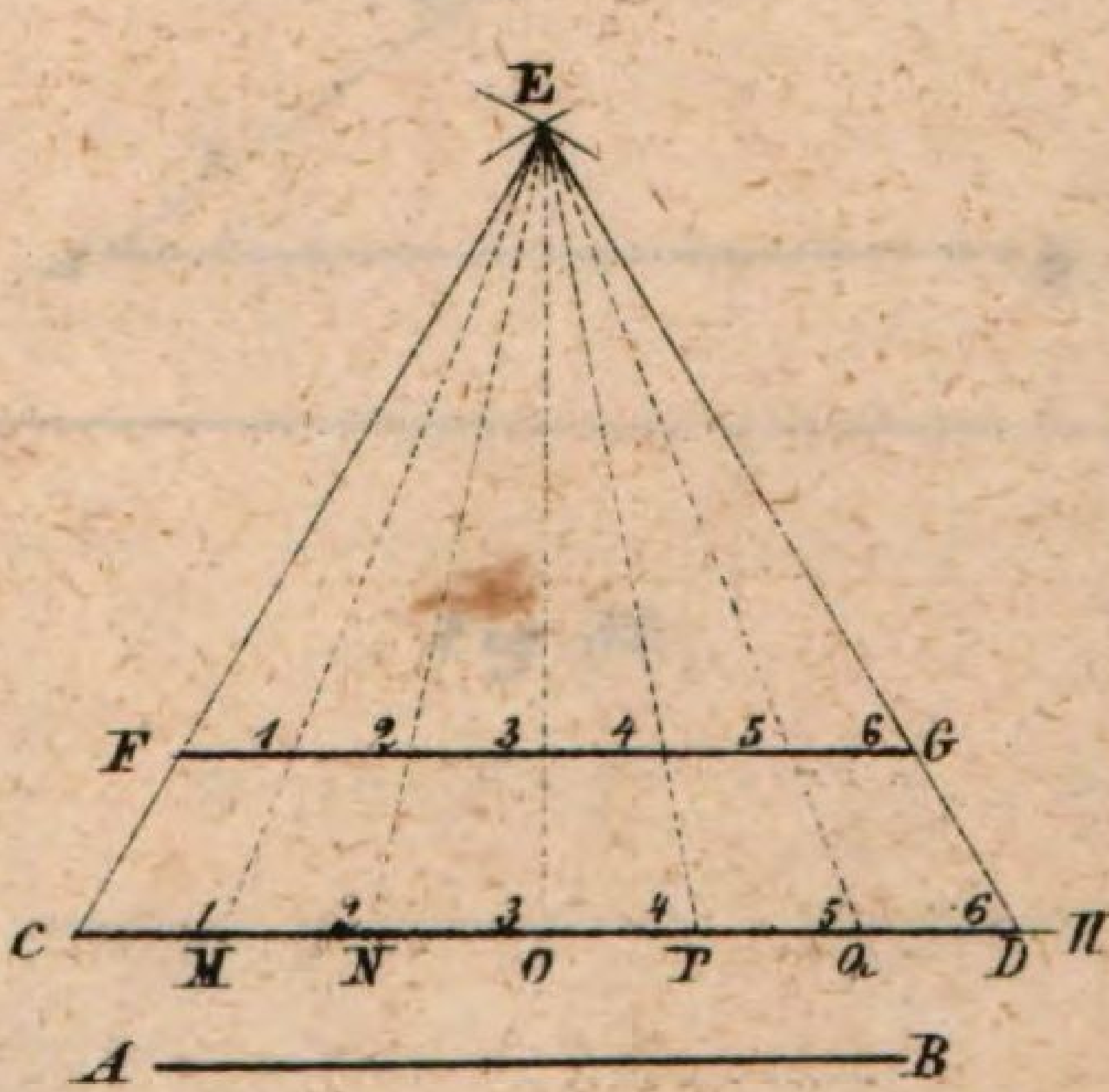


Fig 24.



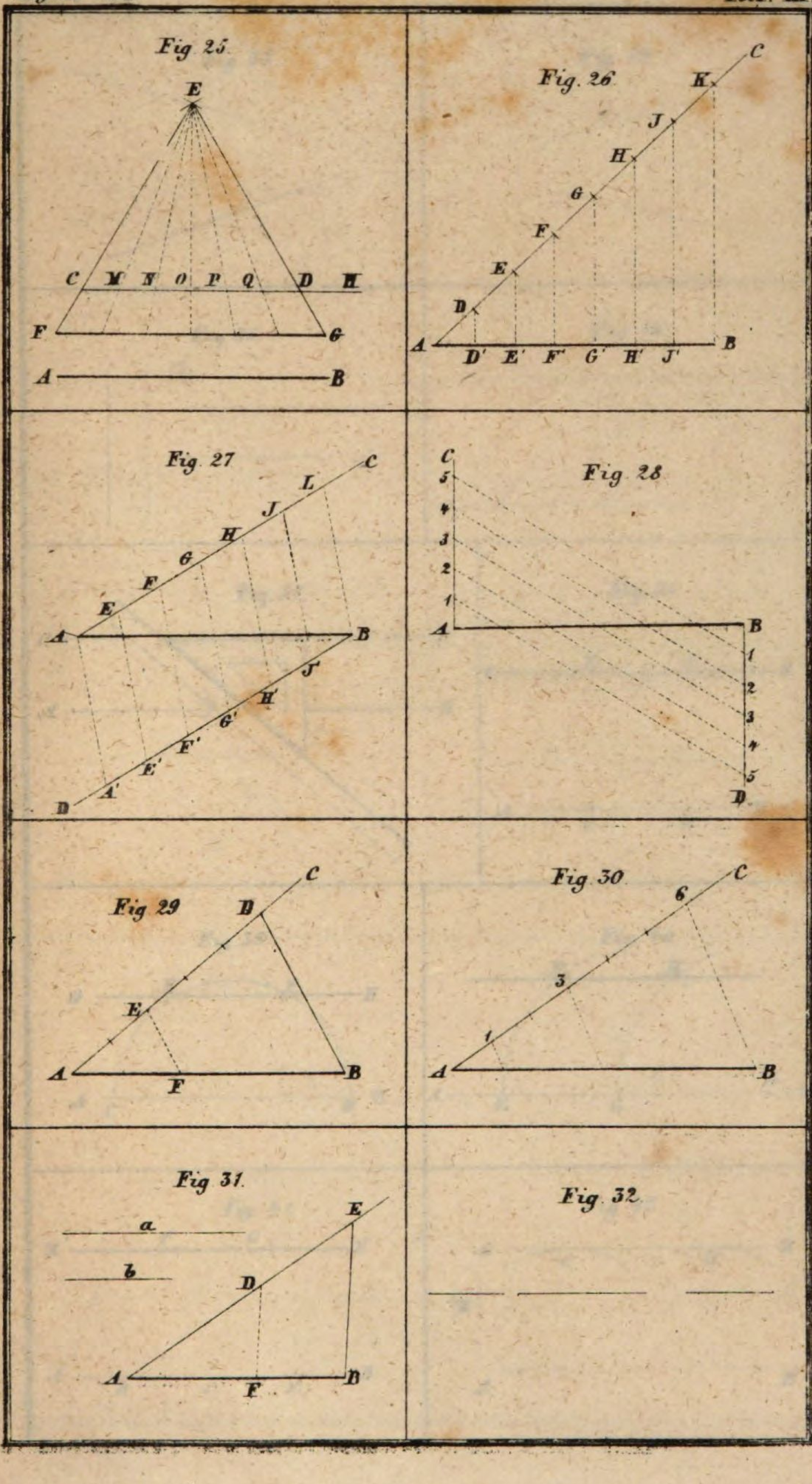

Fig 25
E
C M N O P Q D H
F G
A B
Fig. 26
C
K
J
H
G
F
E
D
A B
D' E' F' G' H' J'
Fig 27
C
L
J
H
G
F
E
A B
J'
H'
G'
F'
E'
A'
D
Fig 28
C
5
4
3
2
1
A B
1
2
3
4
5
D
Fig 29
C
D
E
A B
F
Fig 30
C
6
3
1
A B
Fig 31.
a
b
E
D
A B
F
Fig 32

Fig. 33

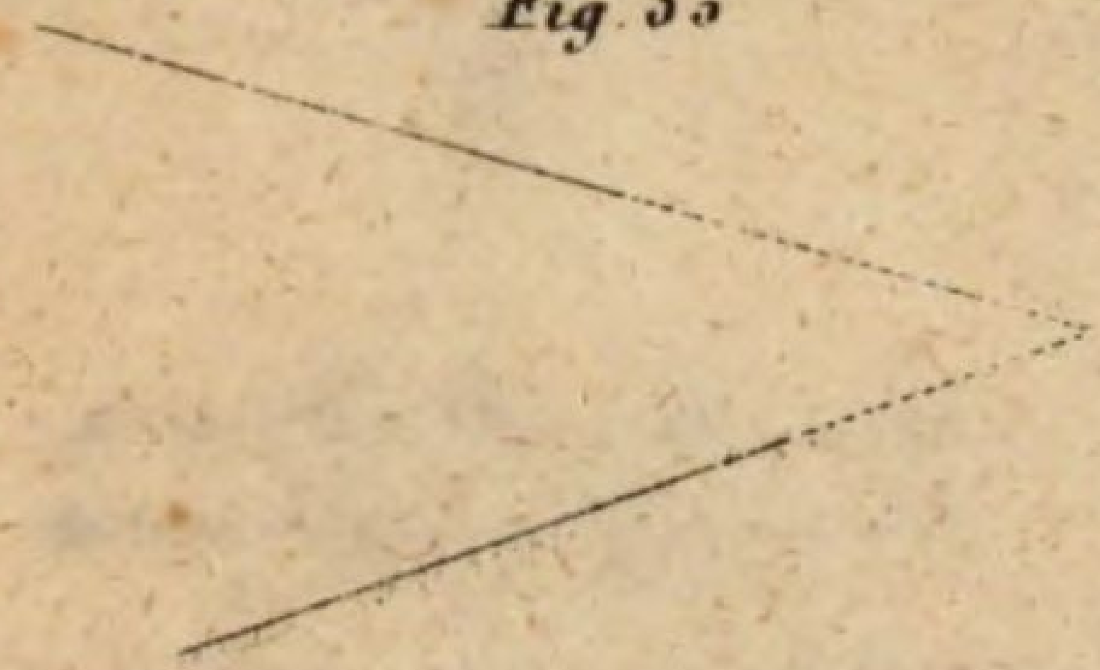


Fig. 34



Fig. 35

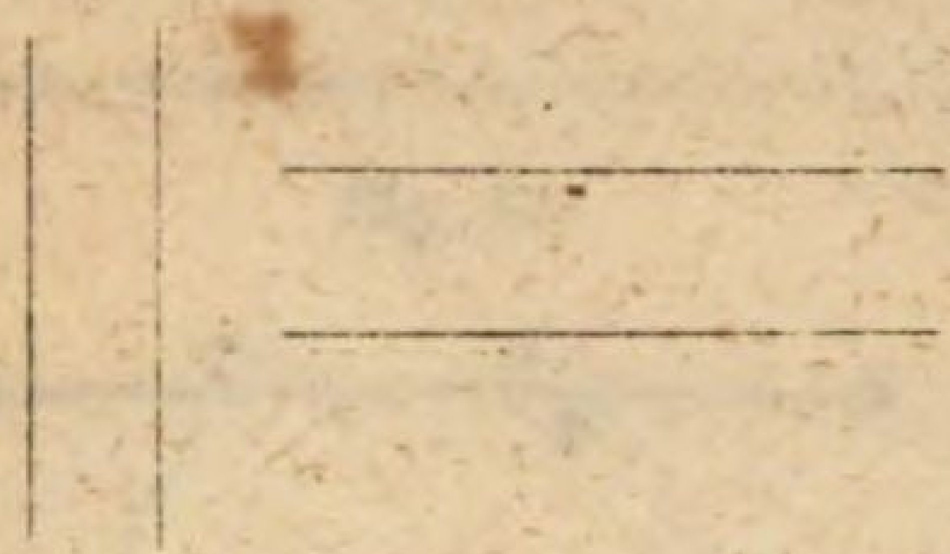


Fig. 36



Fig. 37

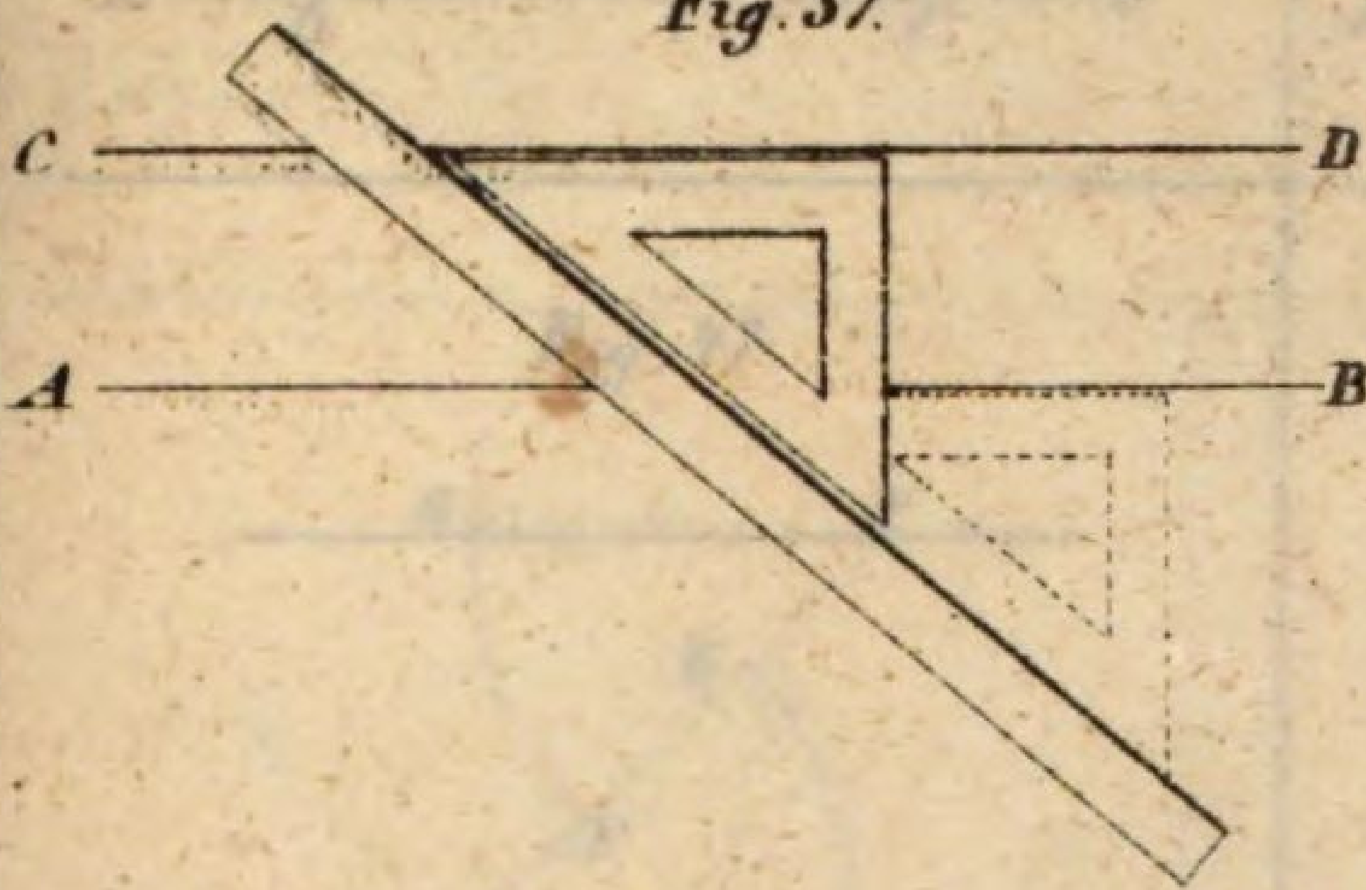


Fig. 38

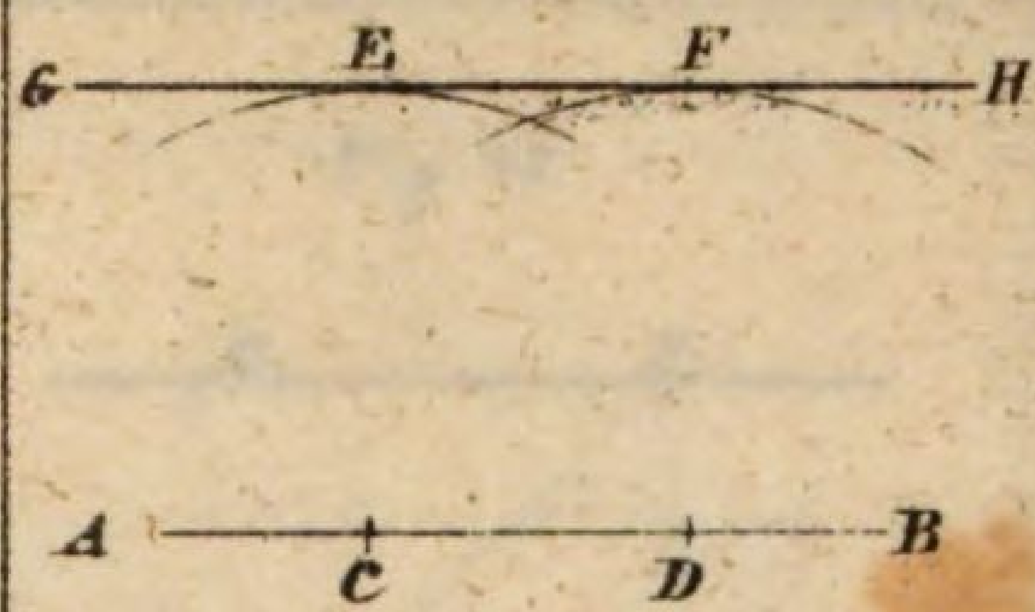


Fig. 39

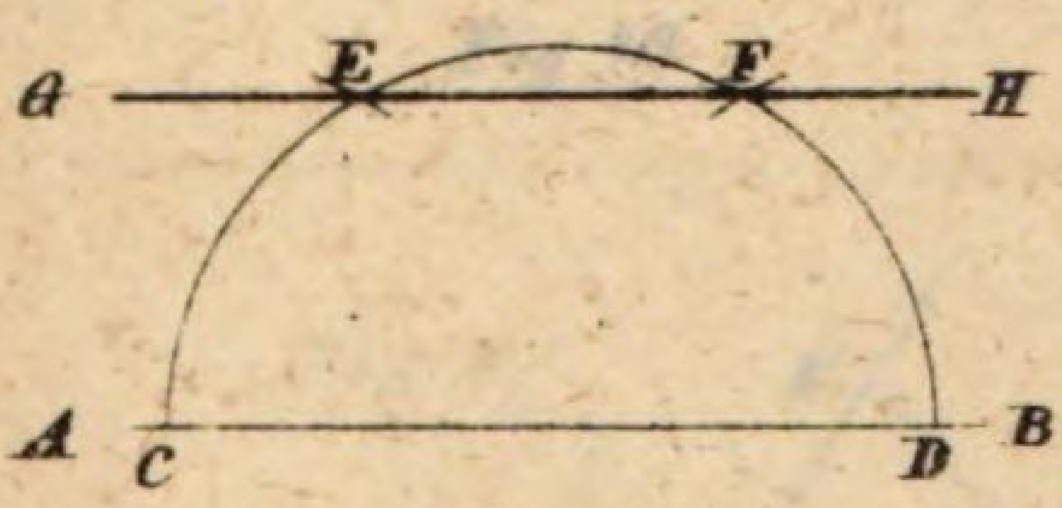


Fig. 40

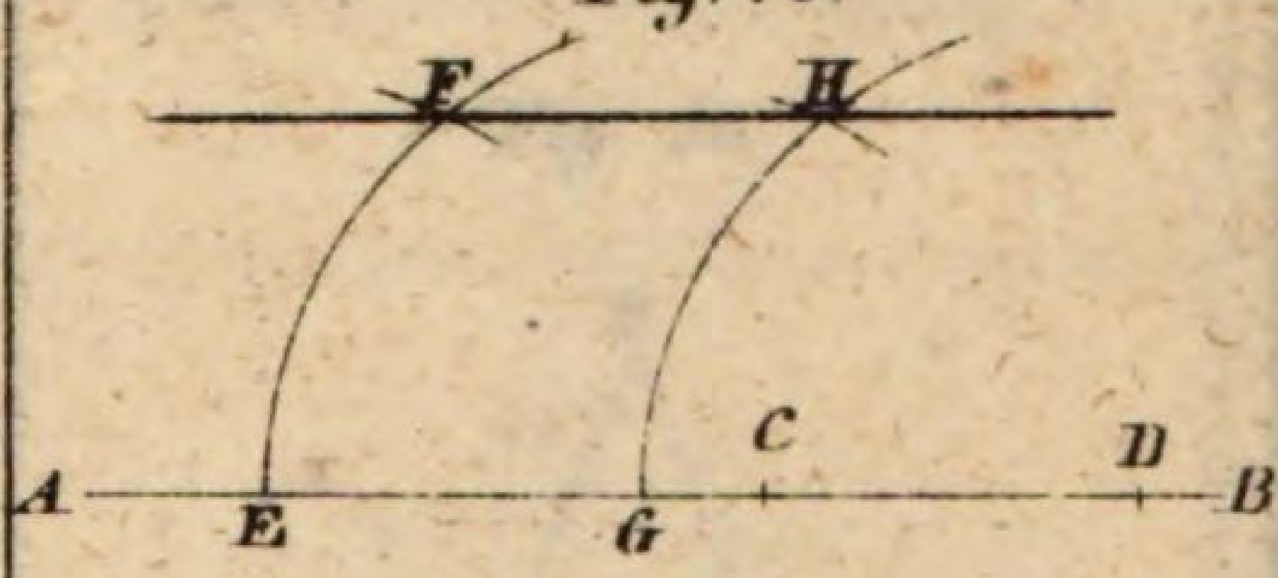


Fig. 41

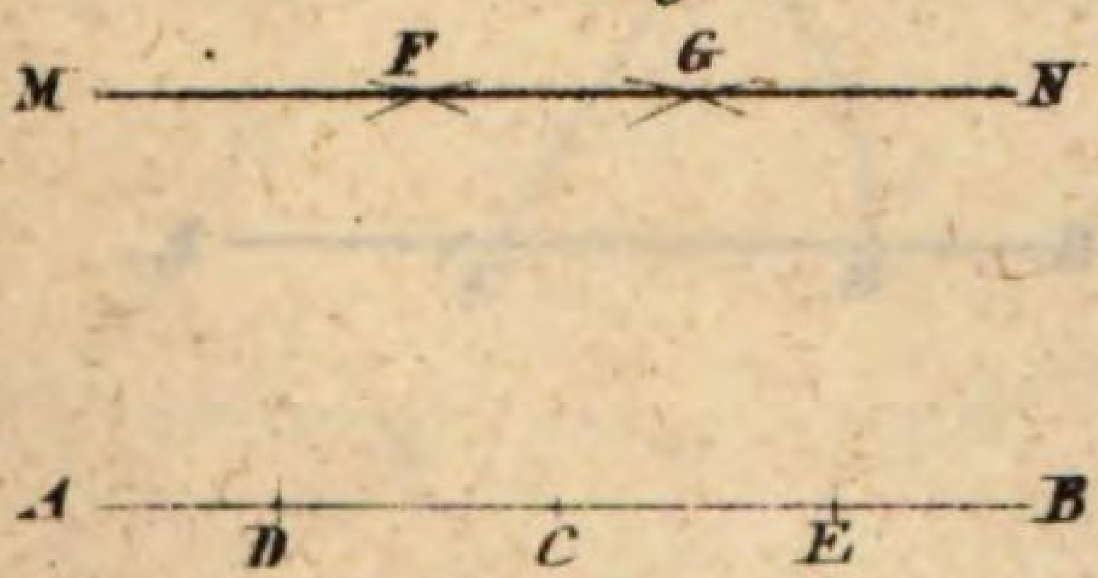


Fig. 42

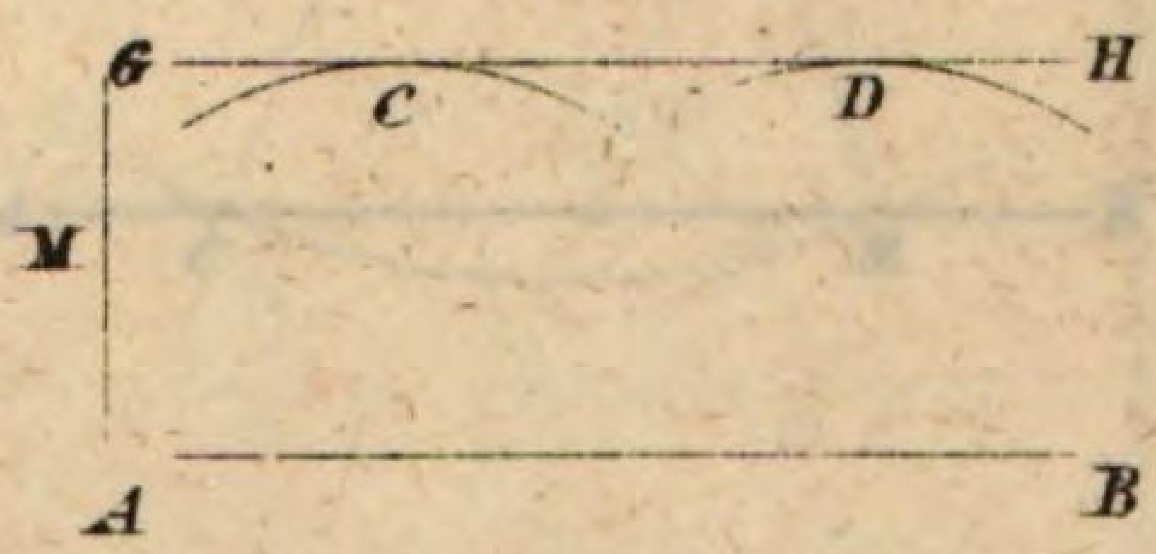


Fig. 43.

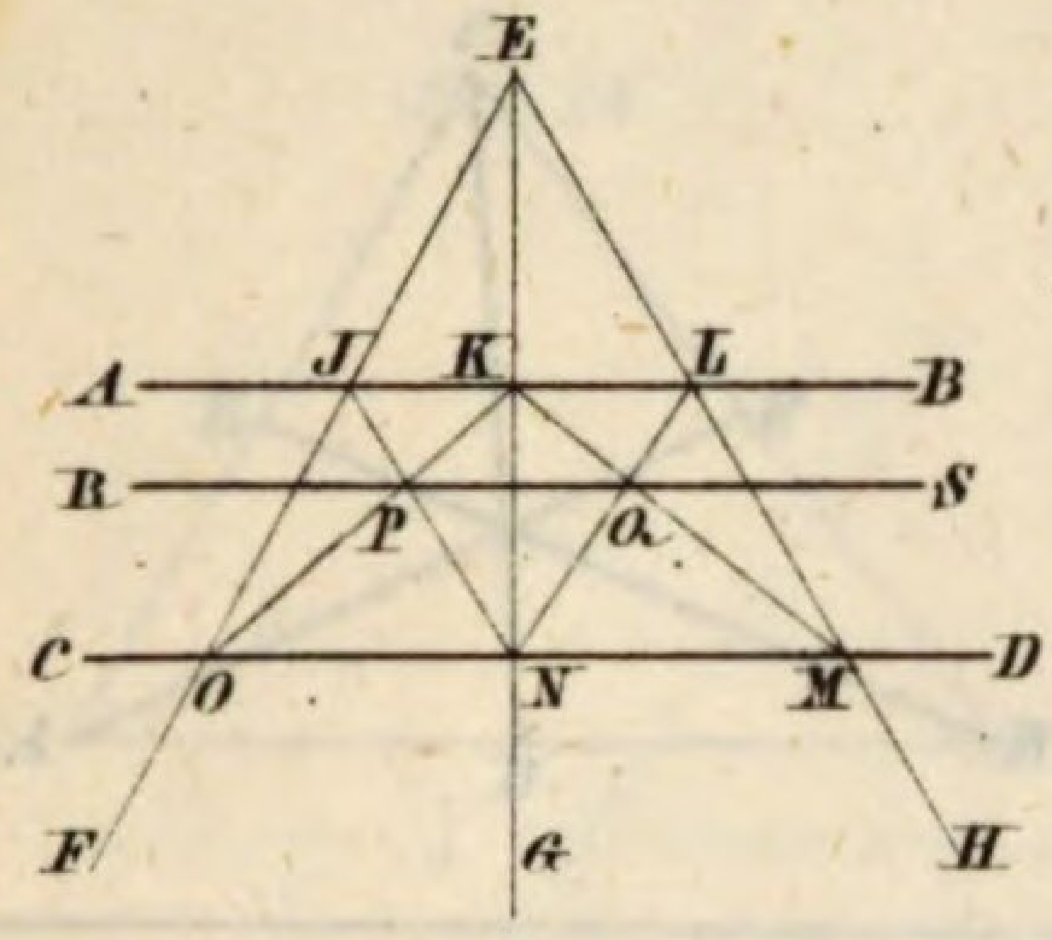


Fig. 44.

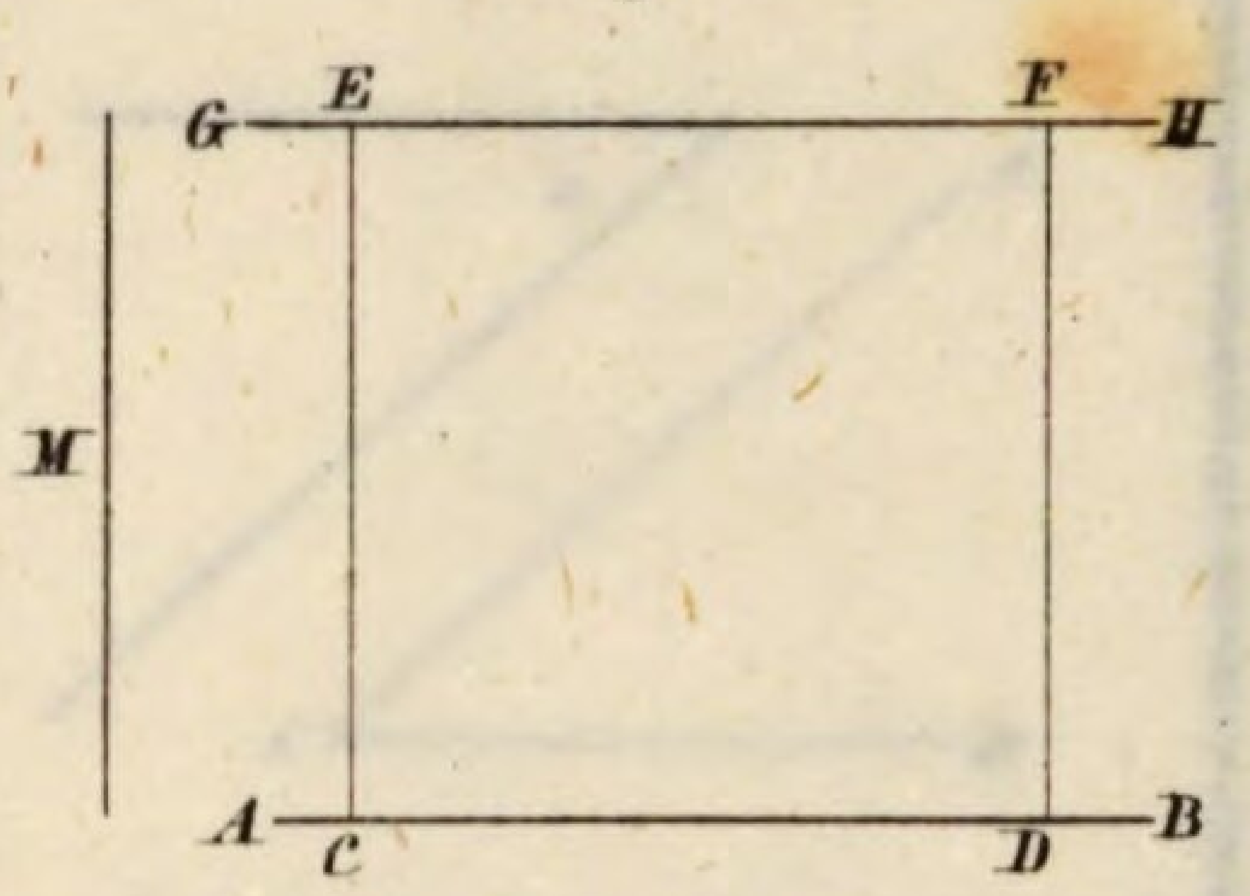


Fig. 45.

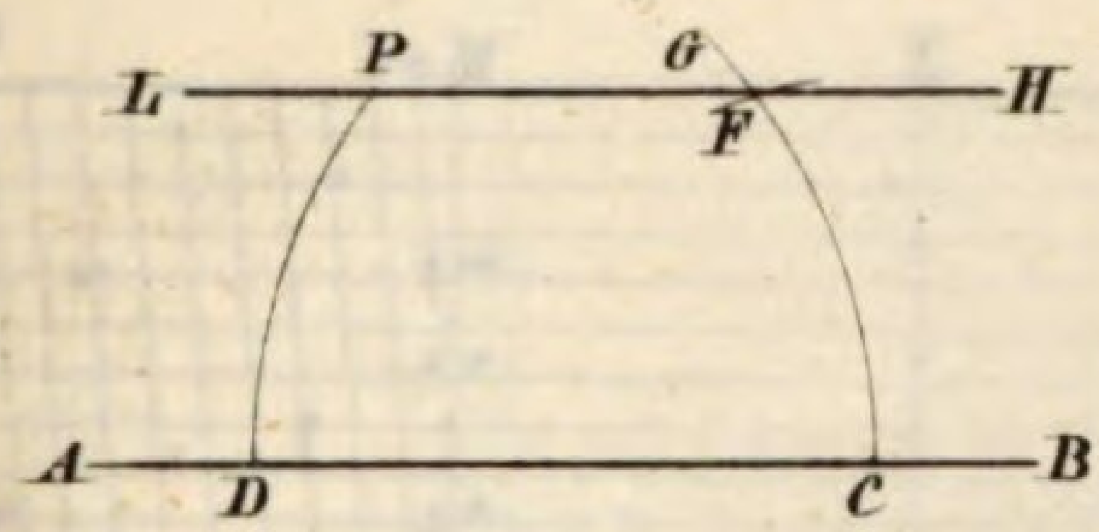


Fig. 46.

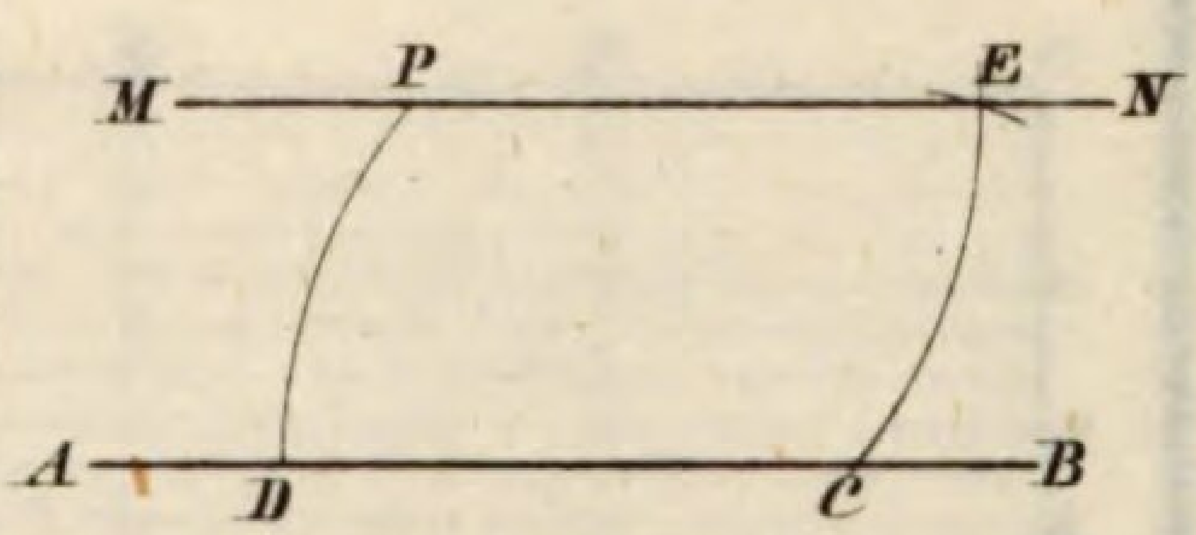


Fig. 47.

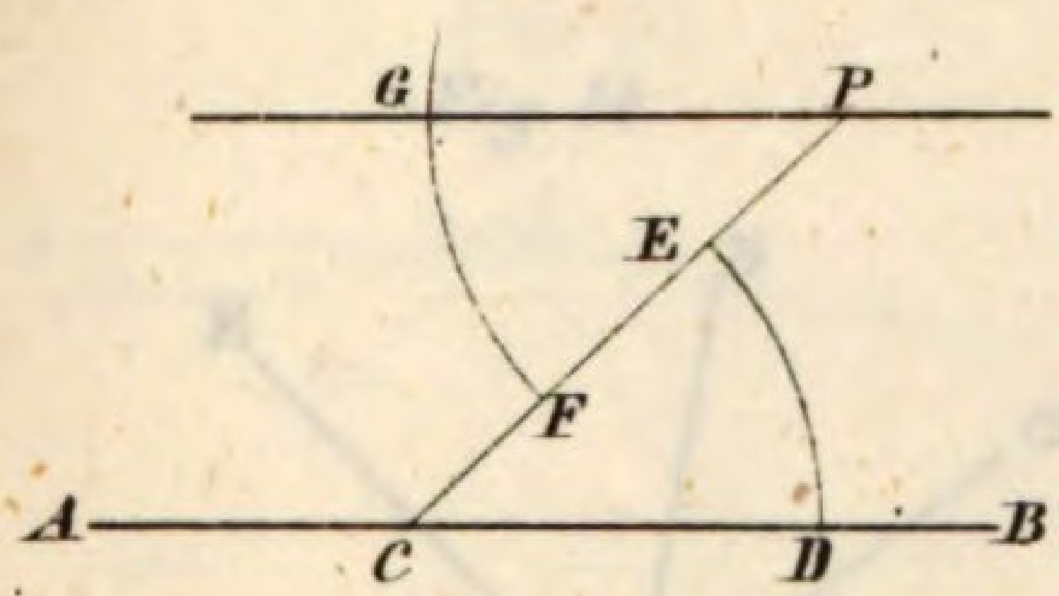


Fig. 48.

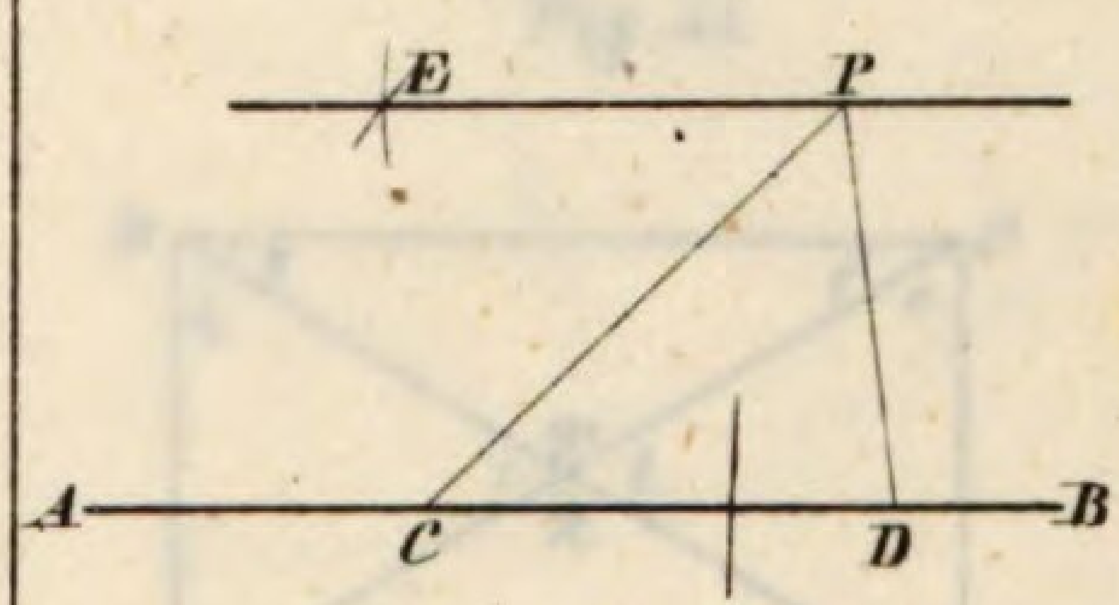


Fig. 49

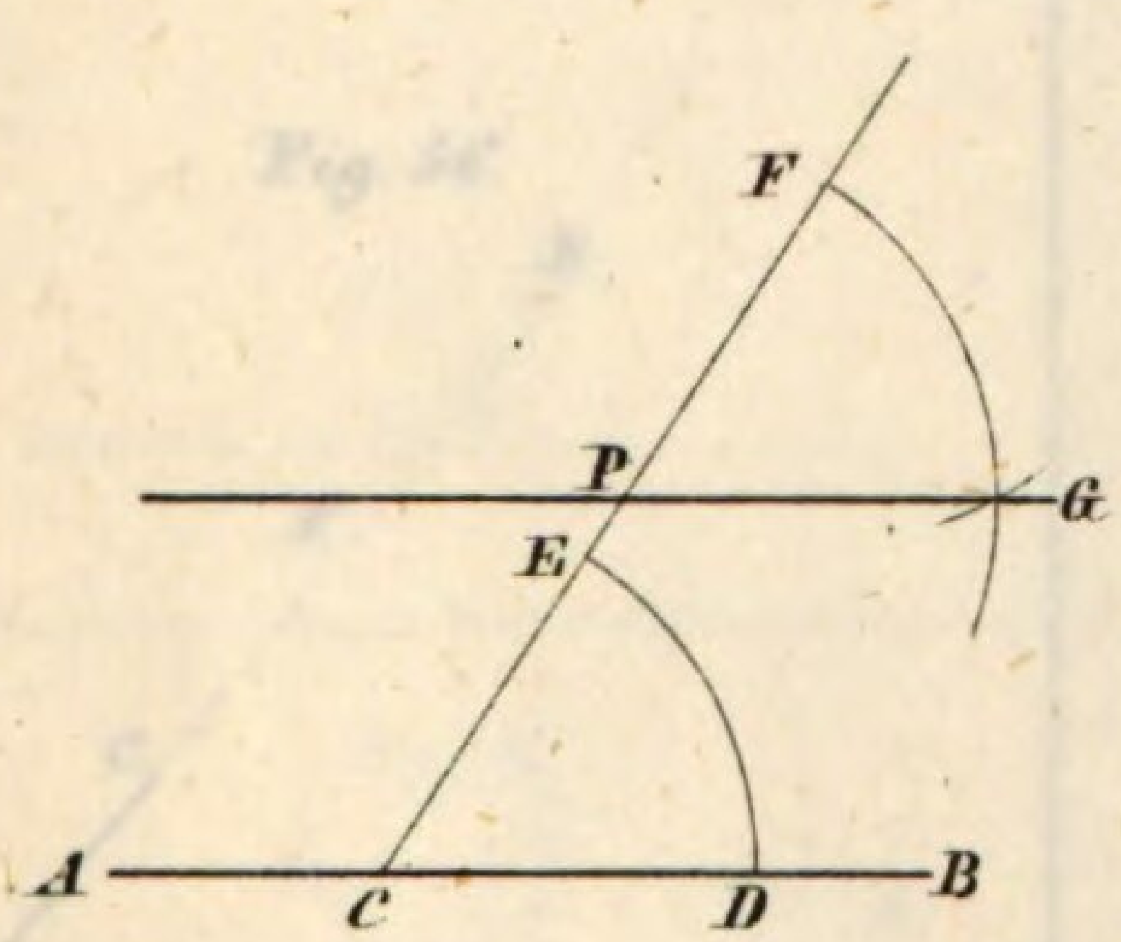


Fig. 50.

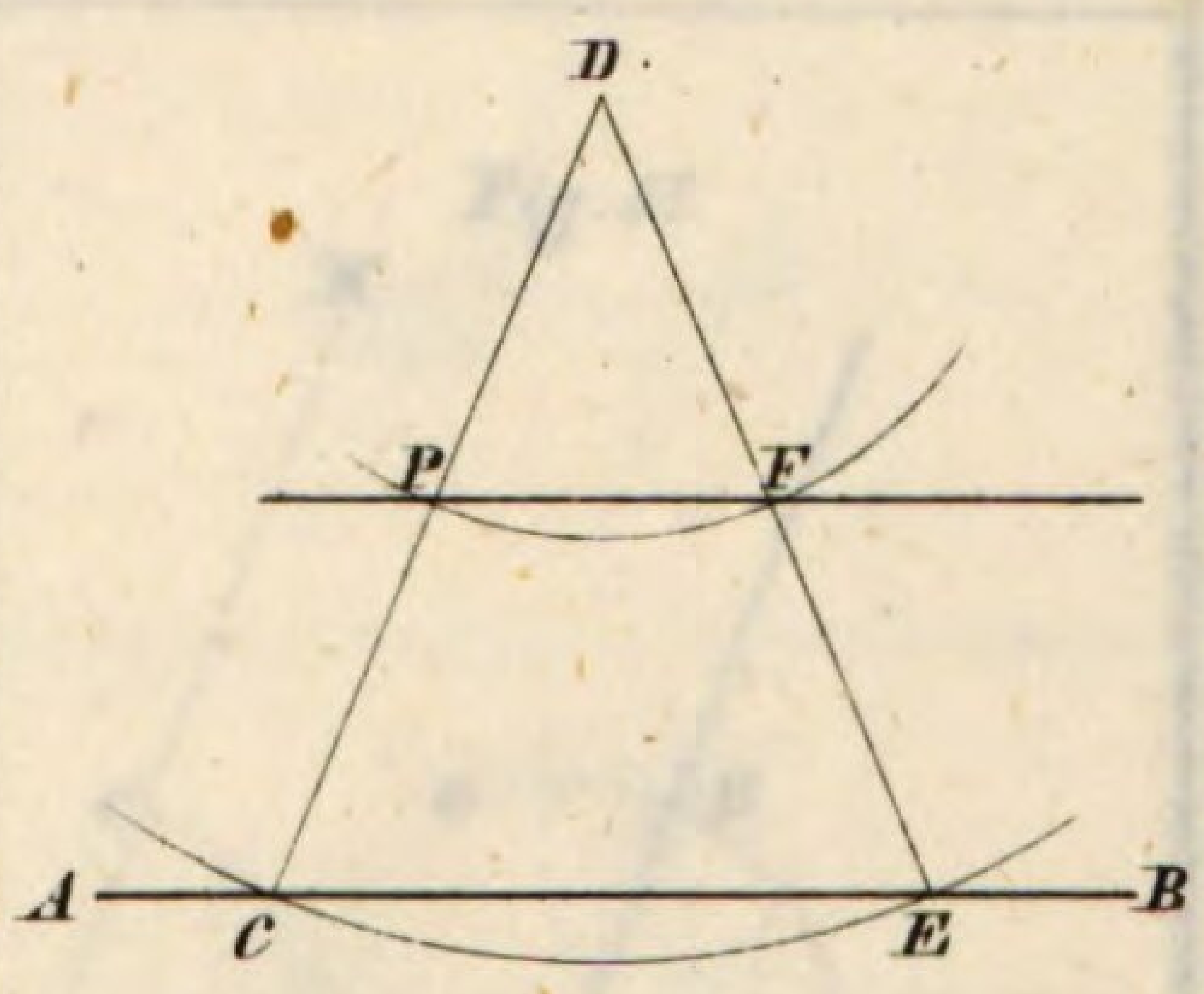


Fig. 51.

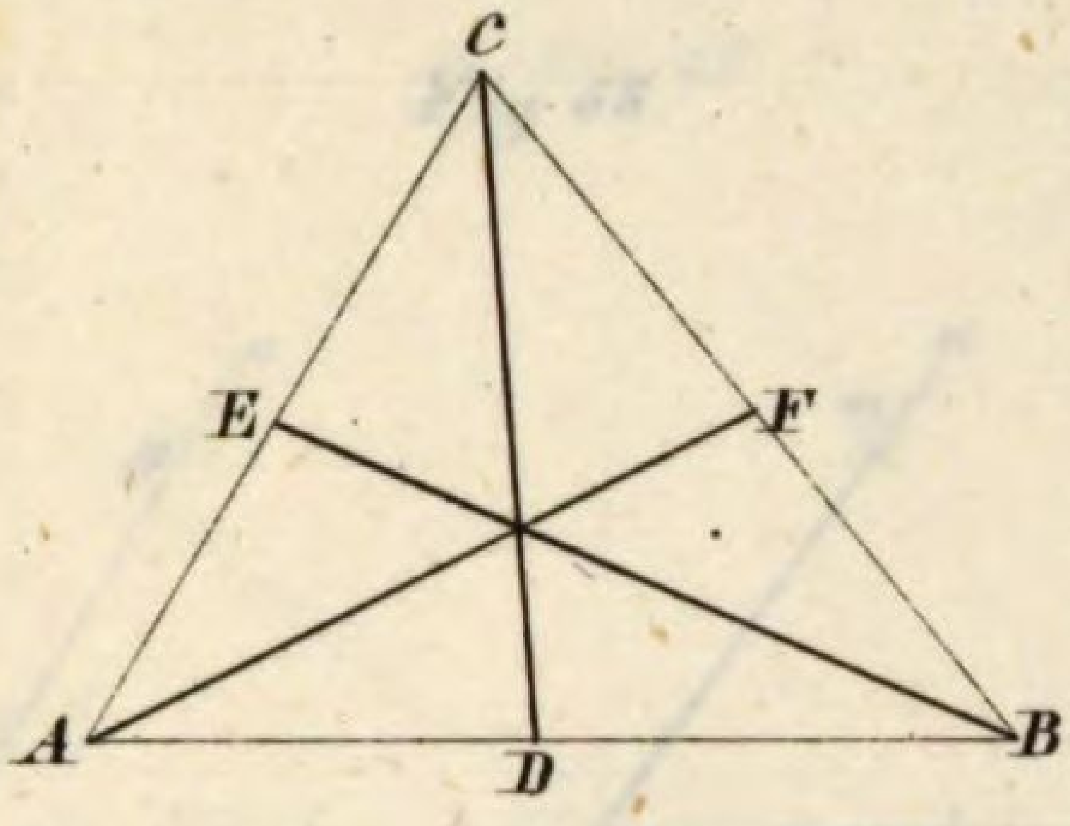


Fig. 52.

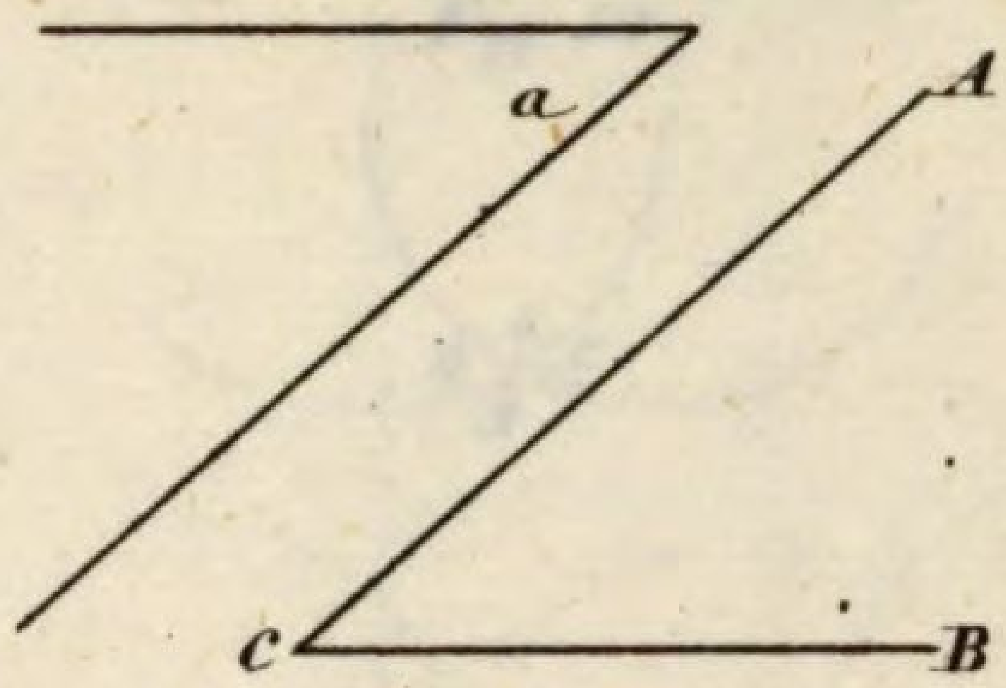


Fig. 53.

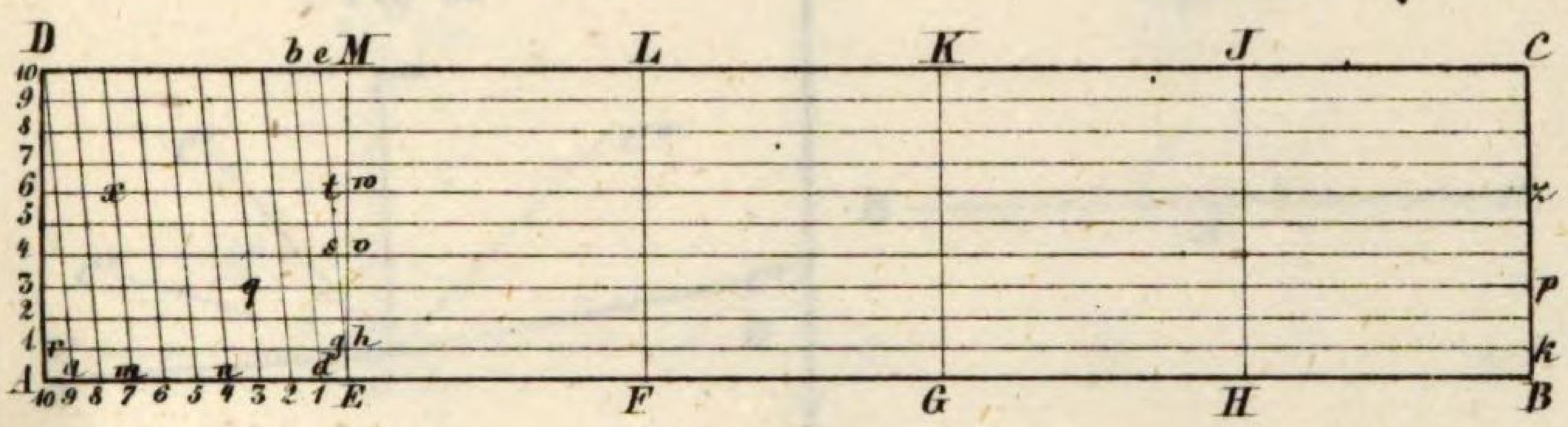


Fig. 54.

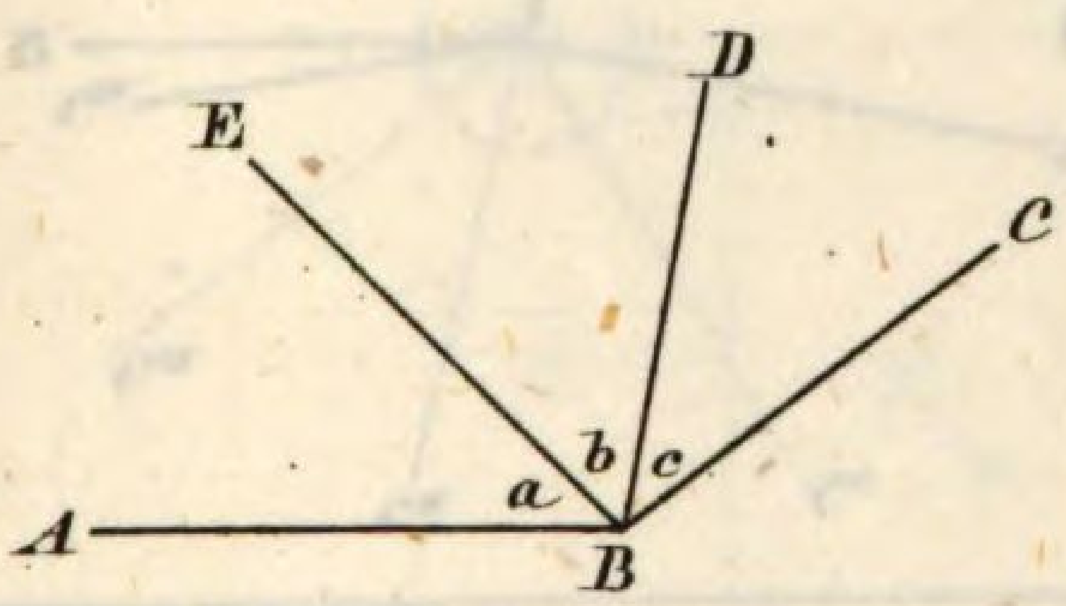


Fig. 55.

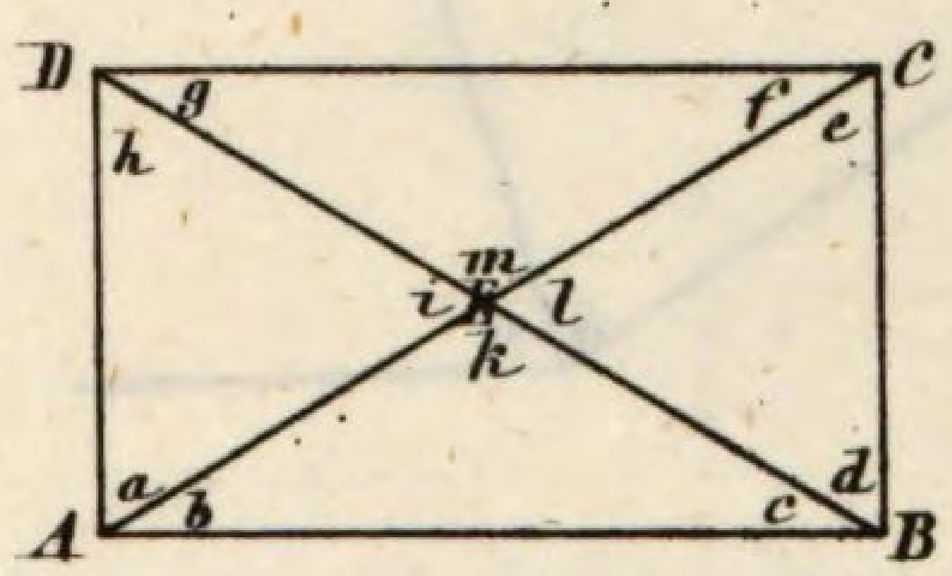


Fig. 56.

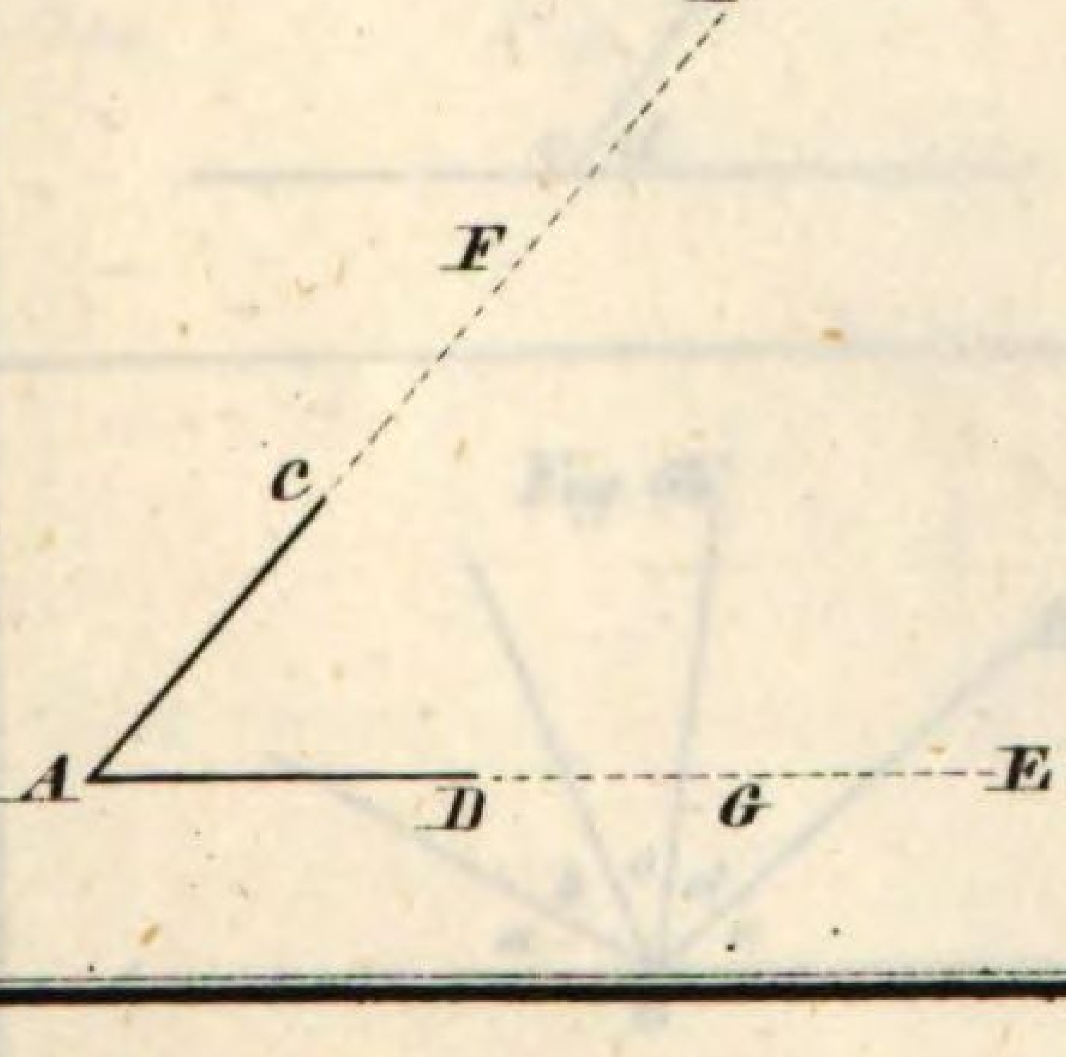


Fig. 57.

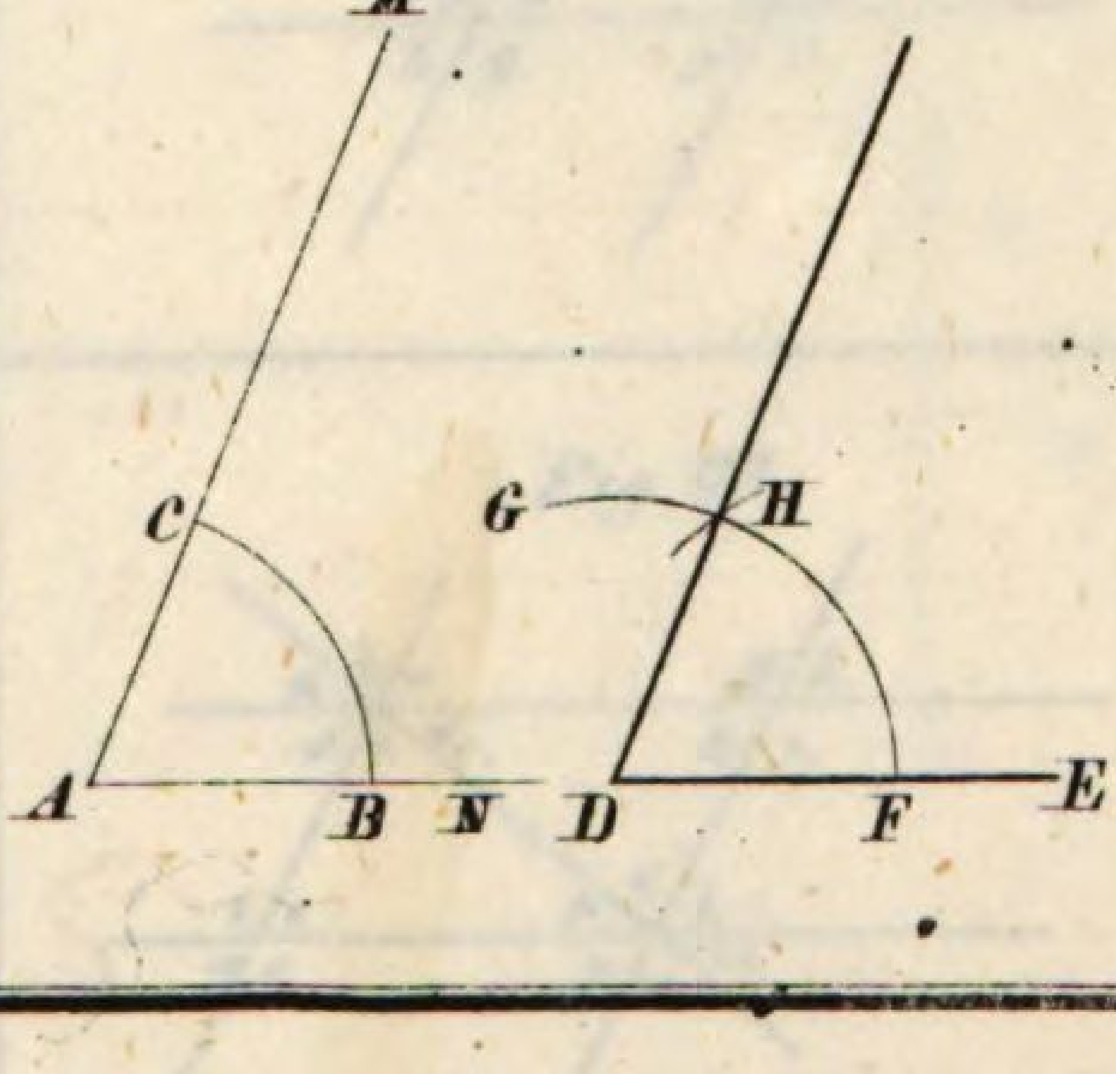


Fig. 58.



Fig. 59.

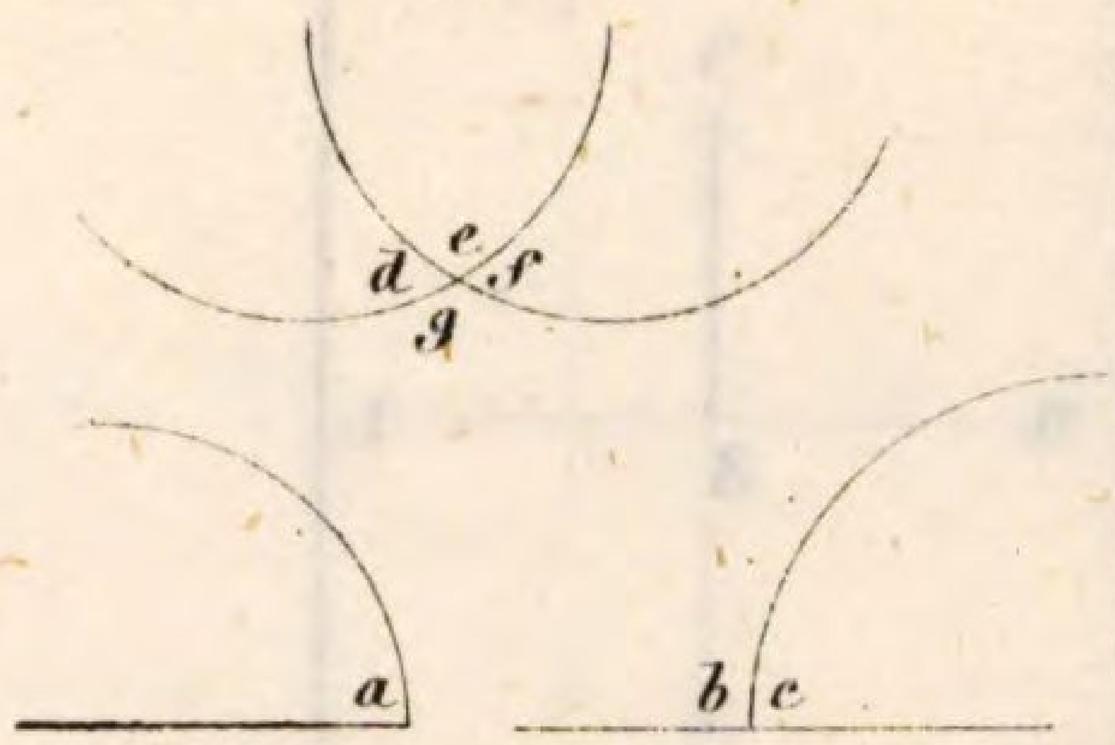


Fig. 60.

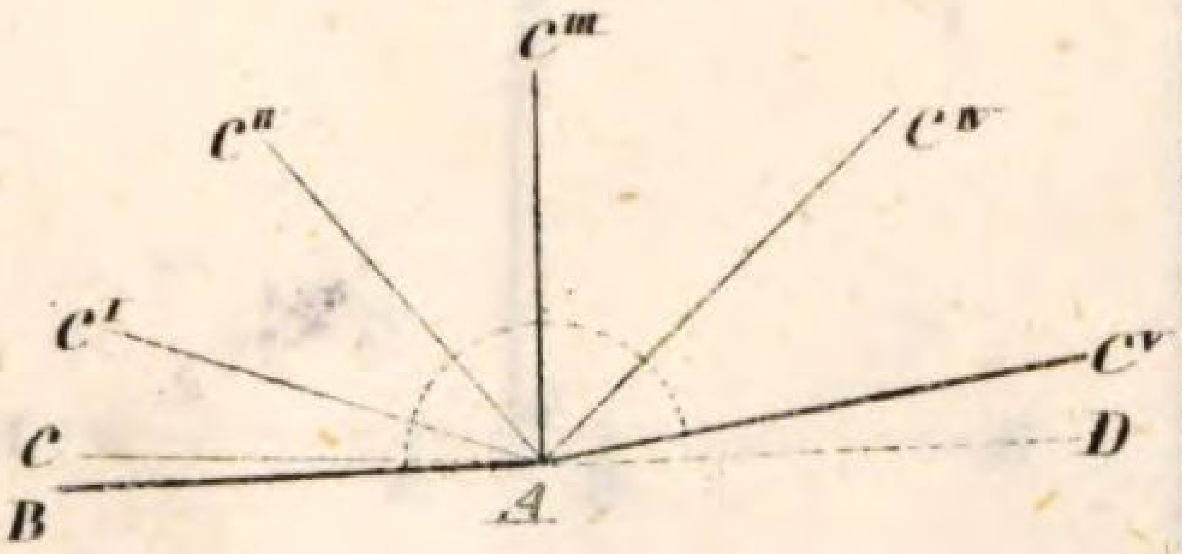


Fig. 61.

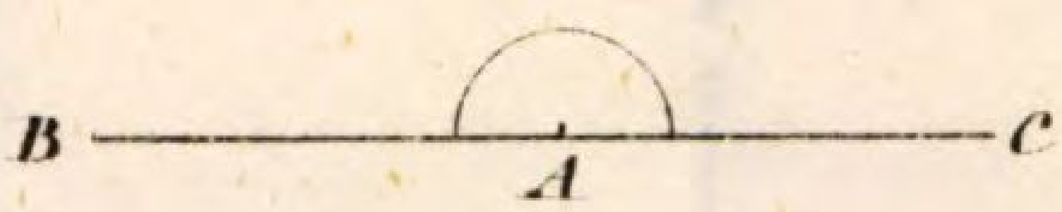


Fig. 62.

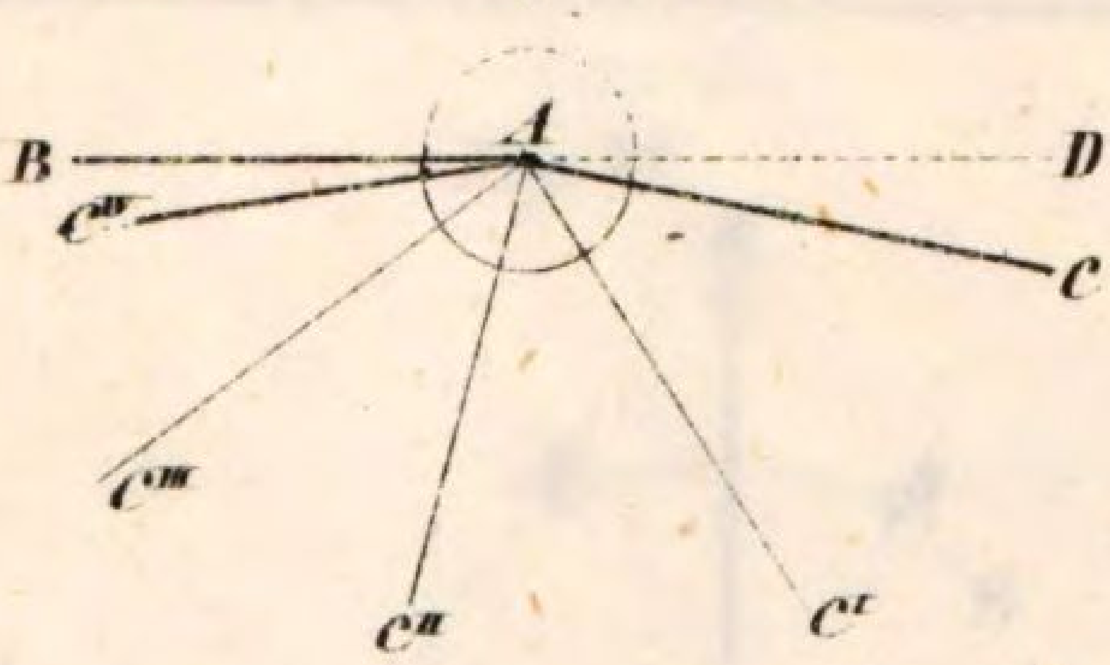


Fig. 63.

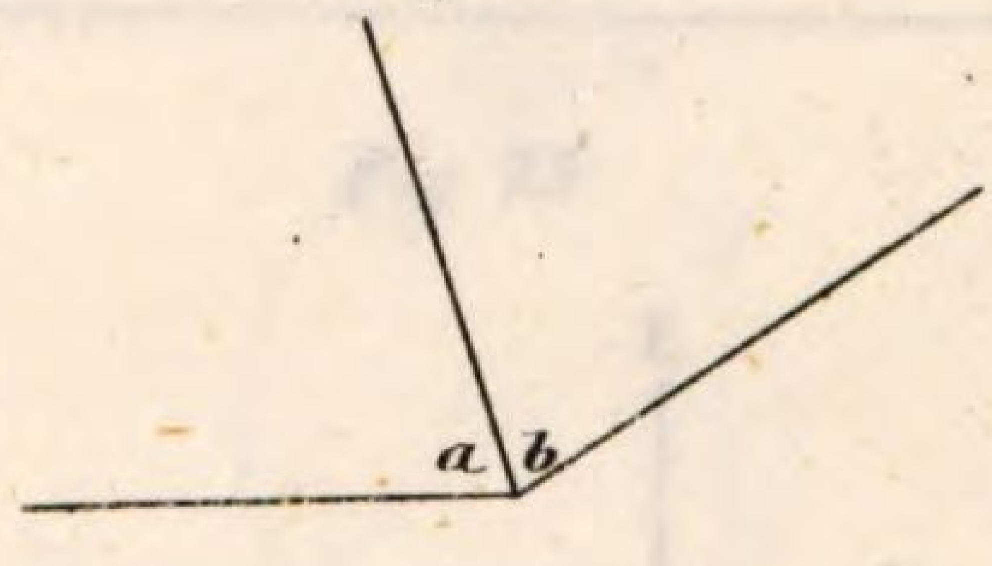


Fig. 64.

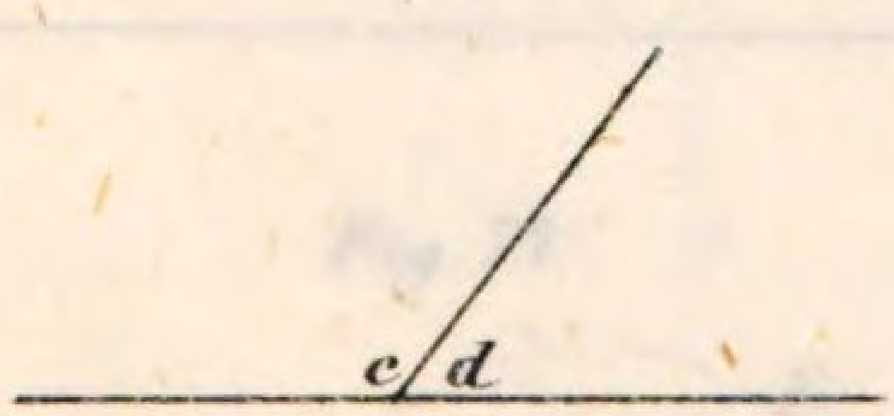


Fig. 65.

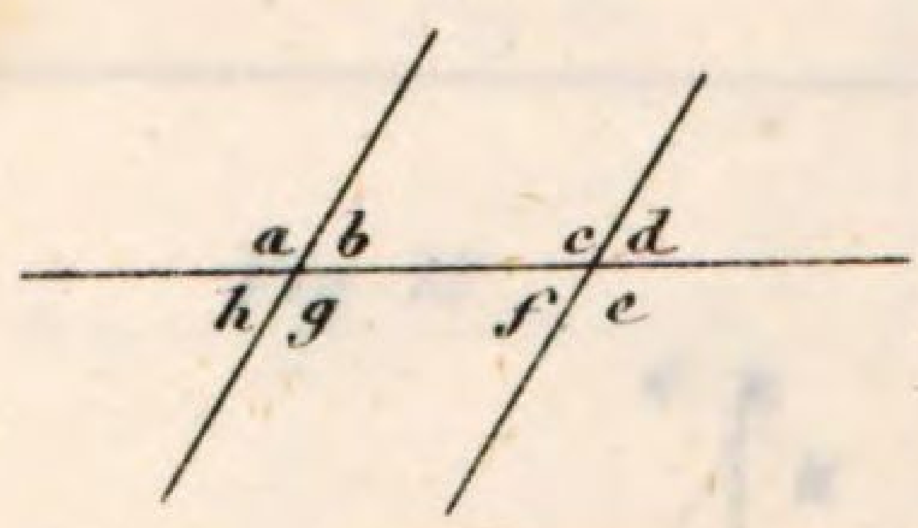


Fig. 66.

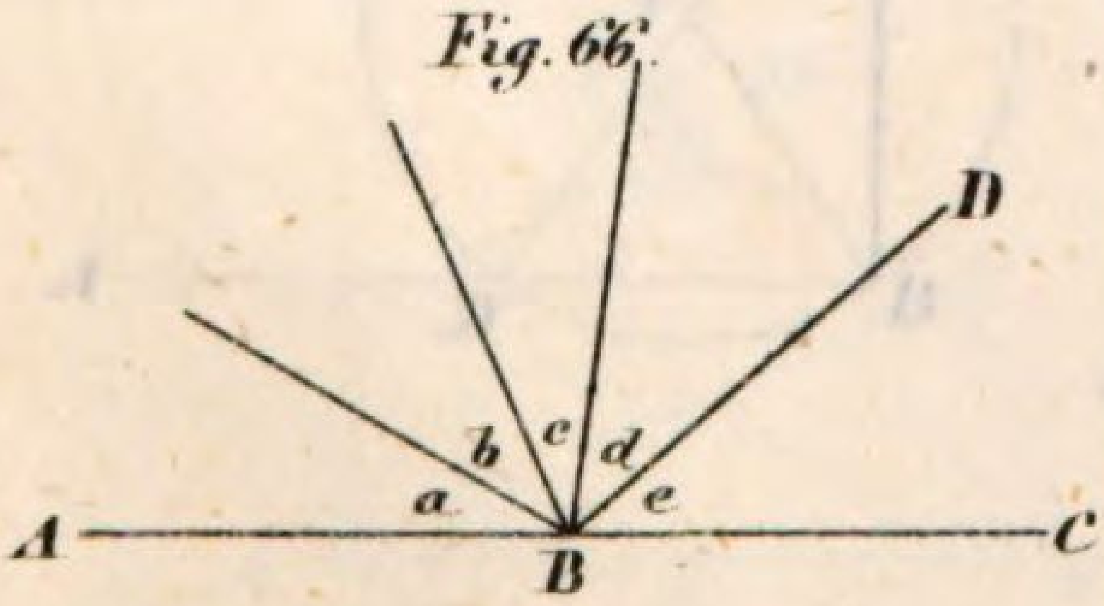


Fig. 67.

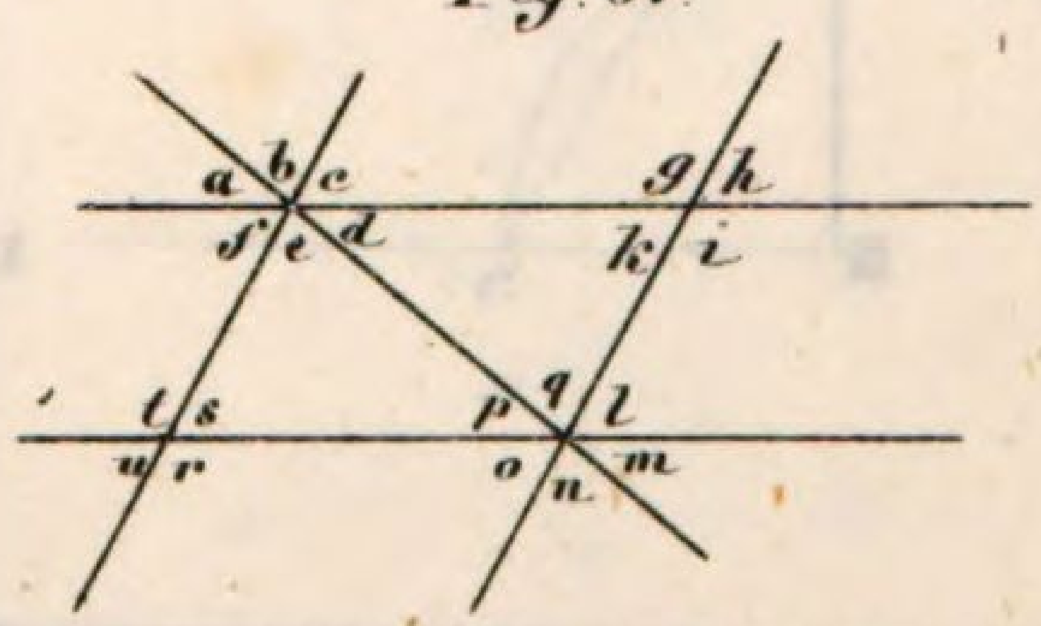


Fig. 68.

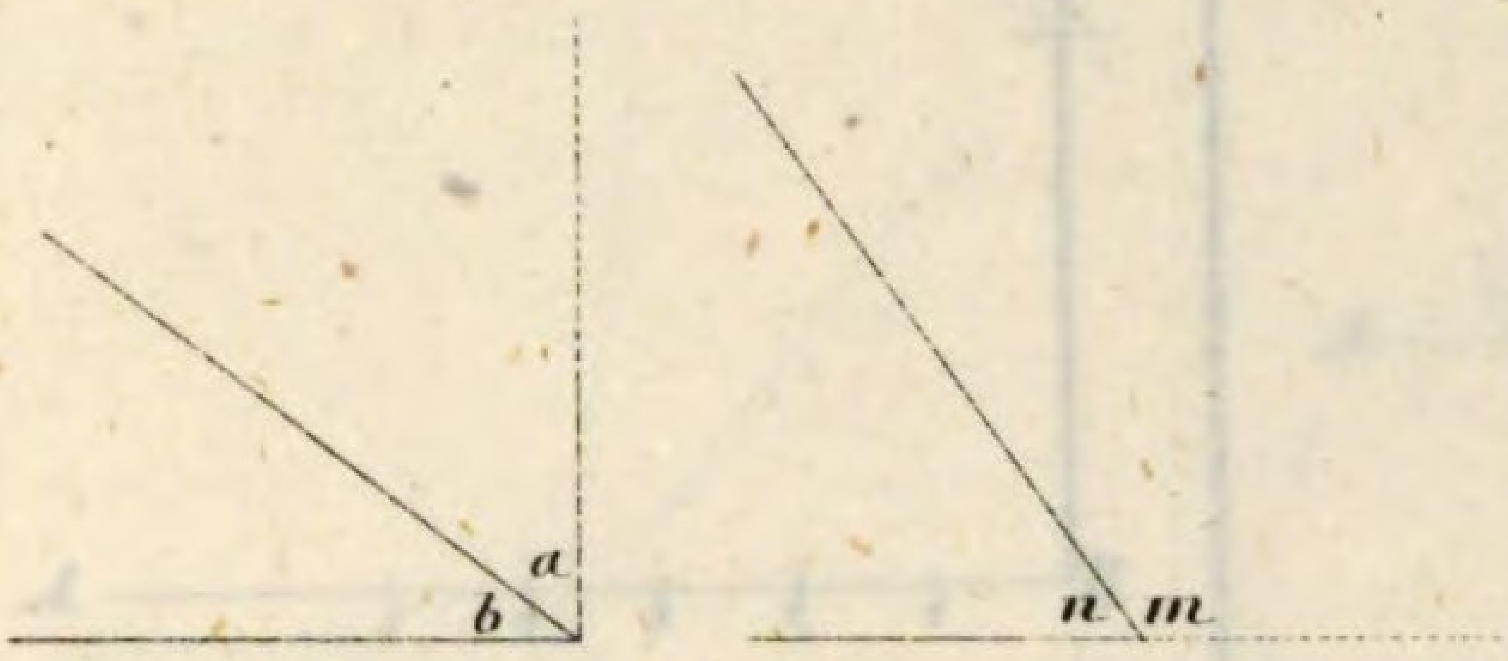


Fig. 69.

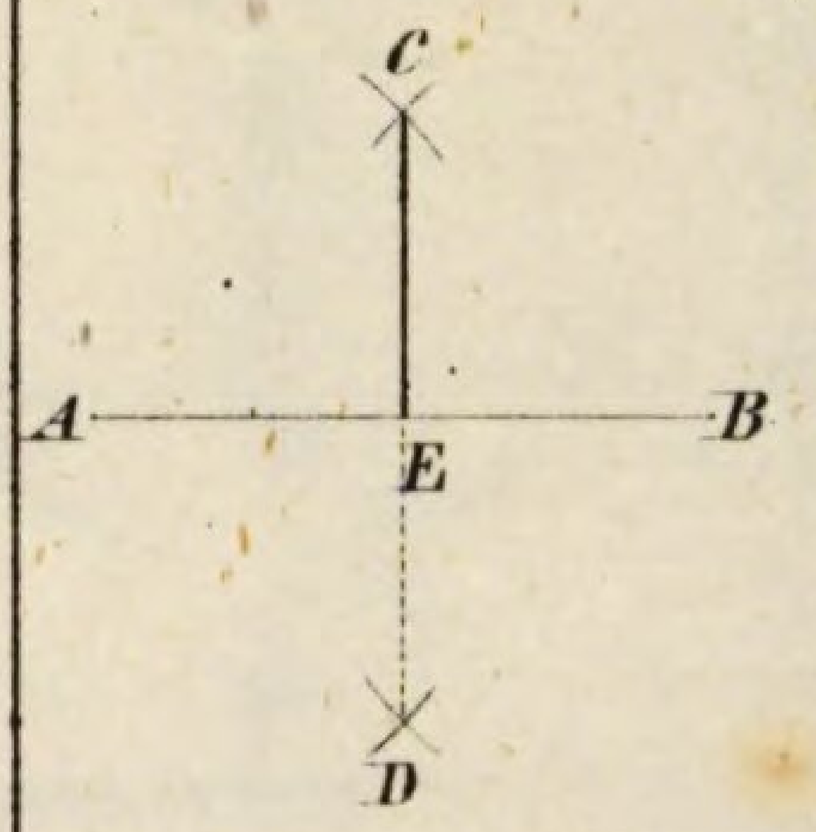


Fig. 70.

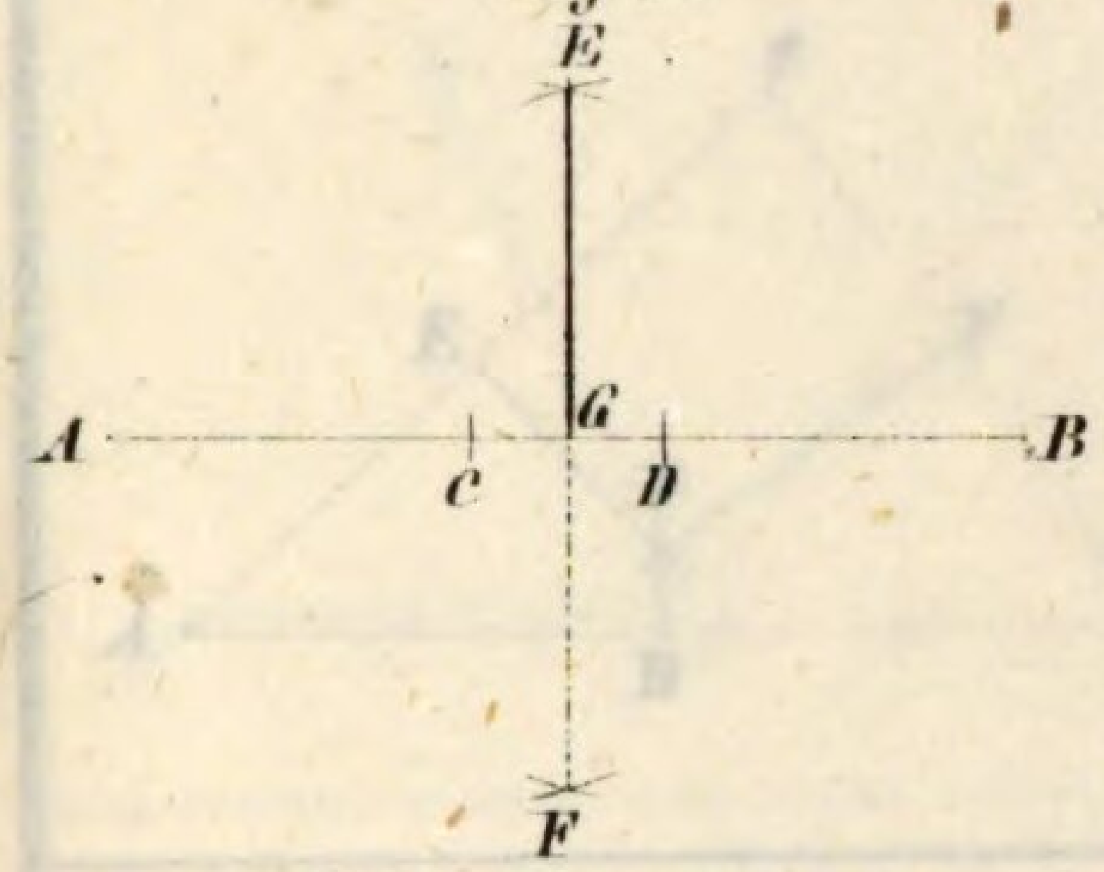


Fig. 71.

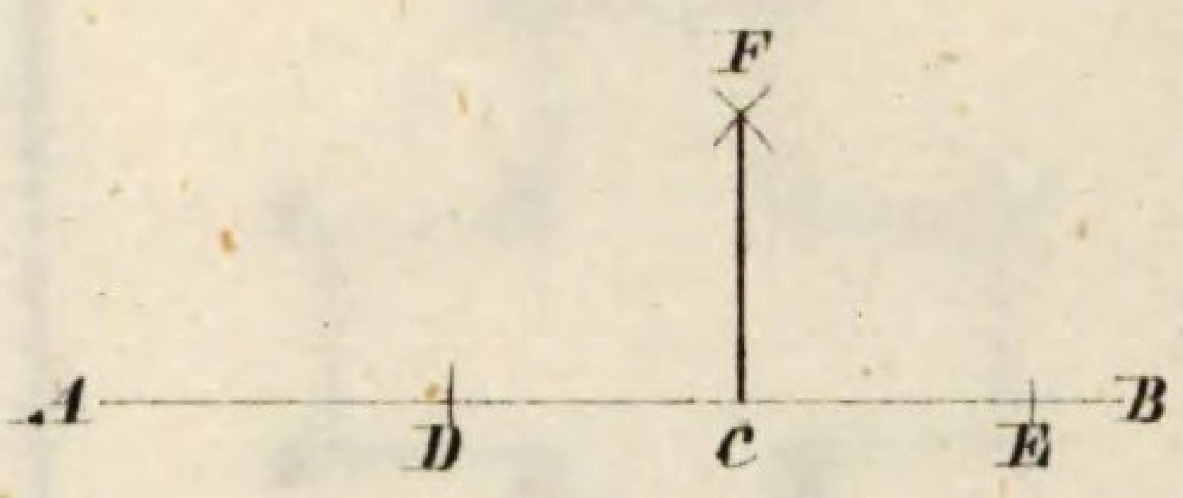


Fig. 72.

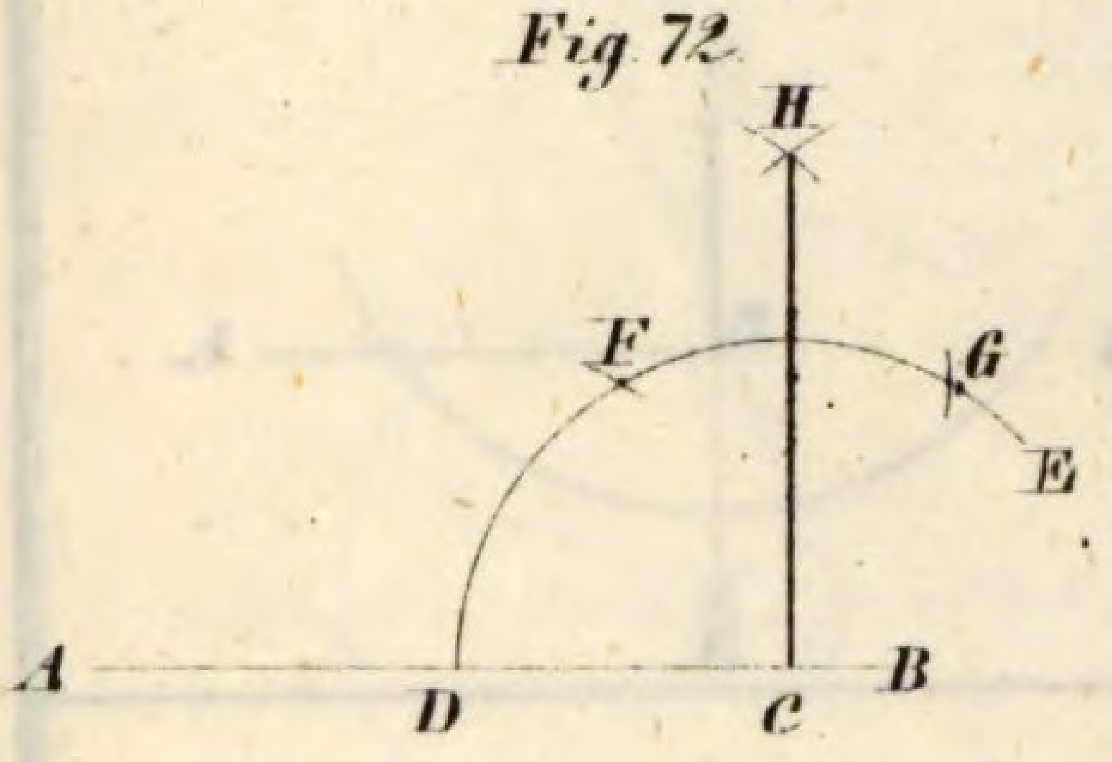


Fig. 73.

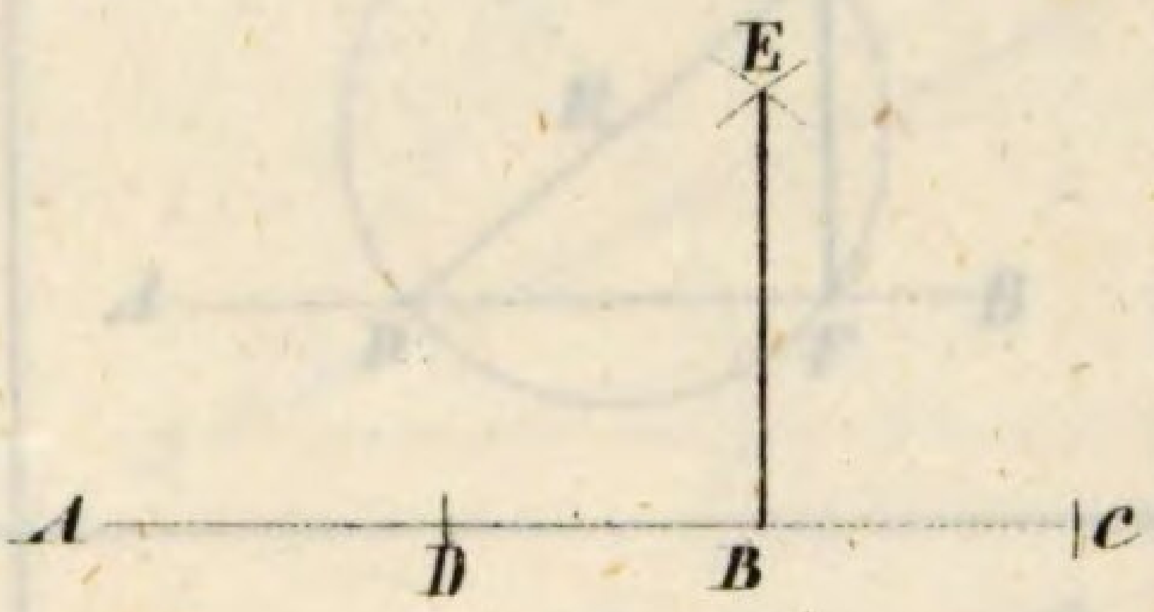


Fig. 74.

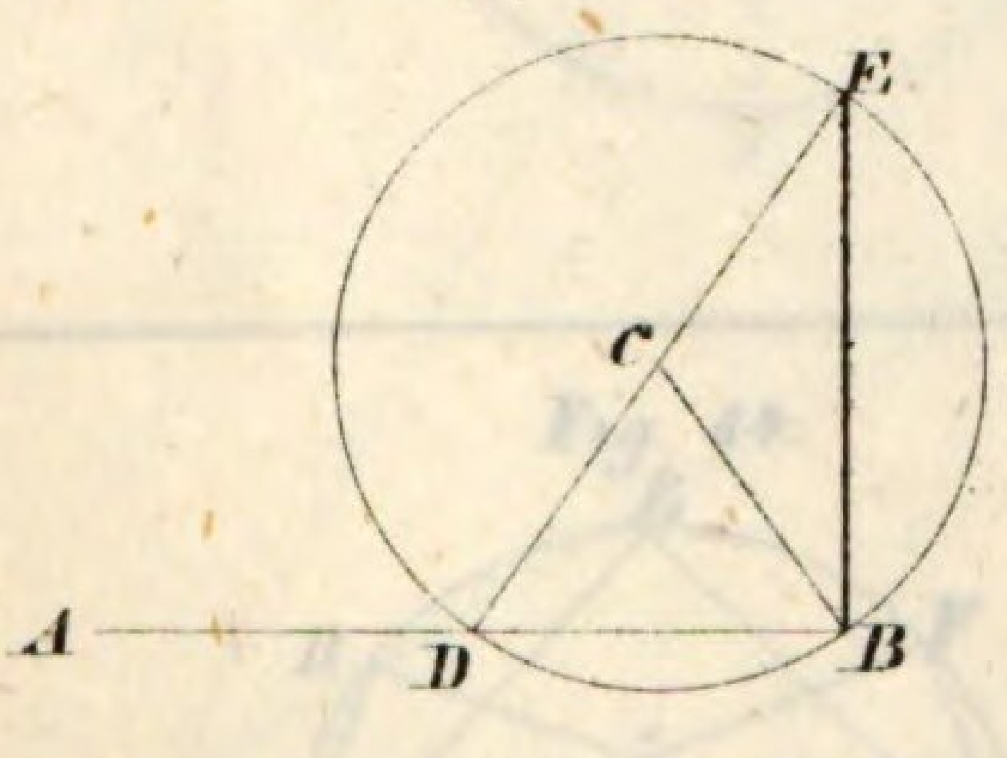


Fig. 75.

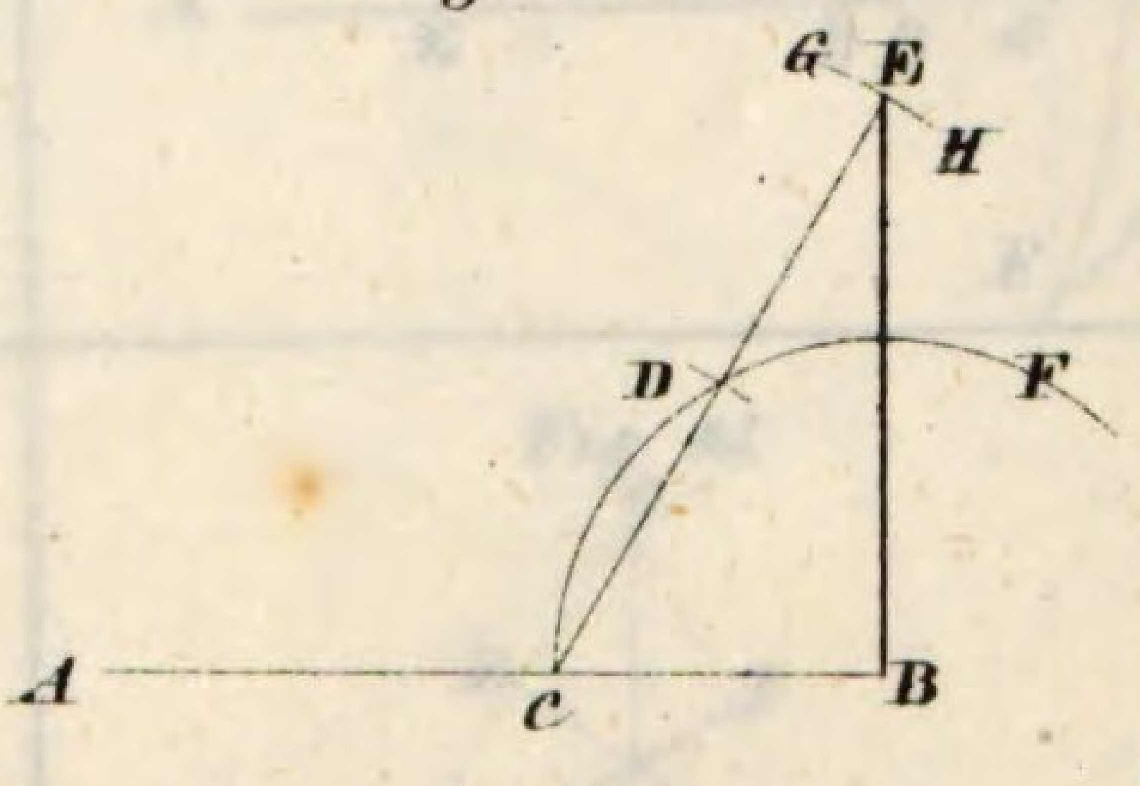


Fig. 76.

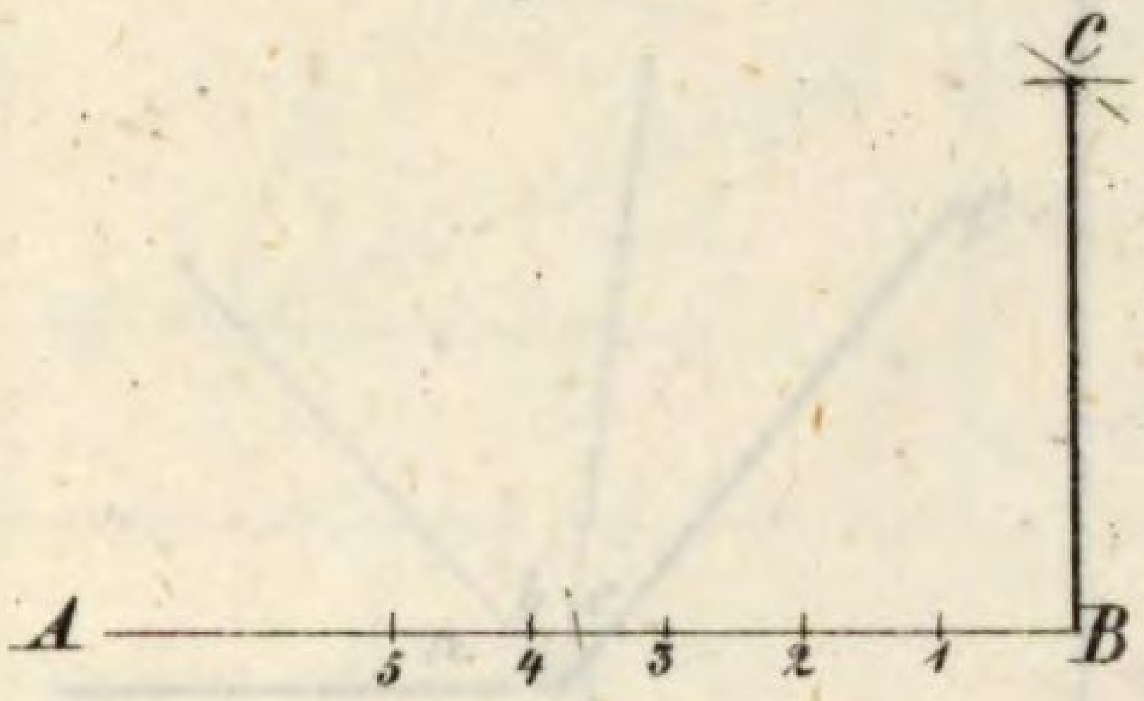


Fig. 79.

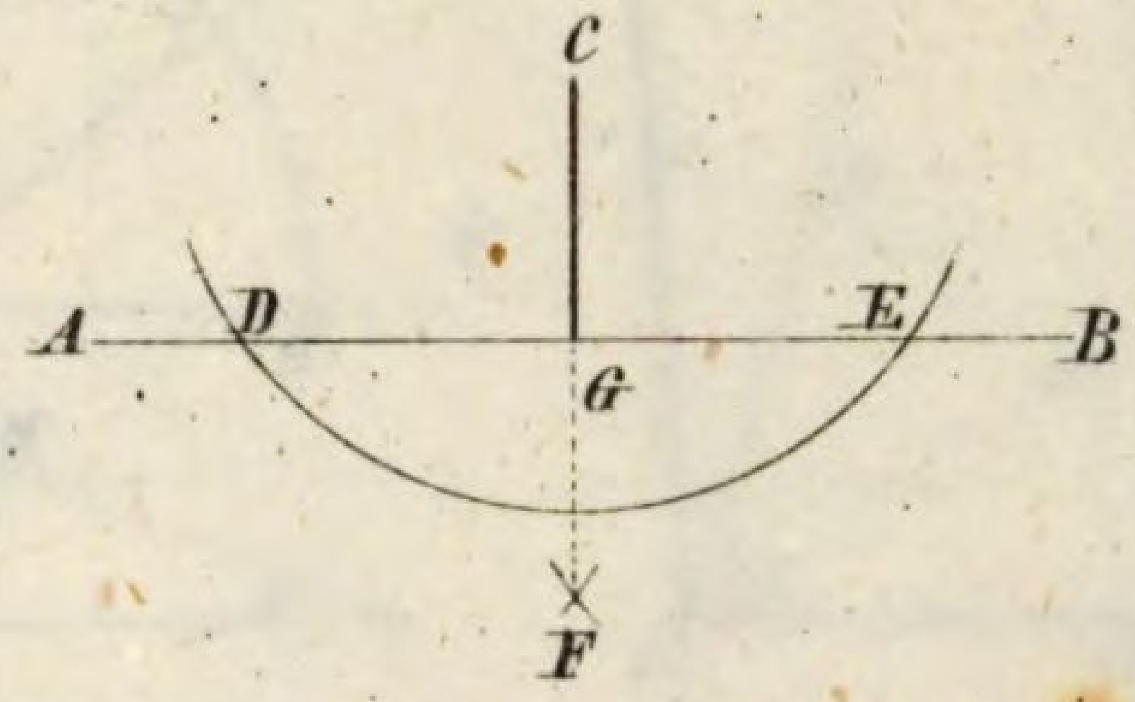


Fig. 77.

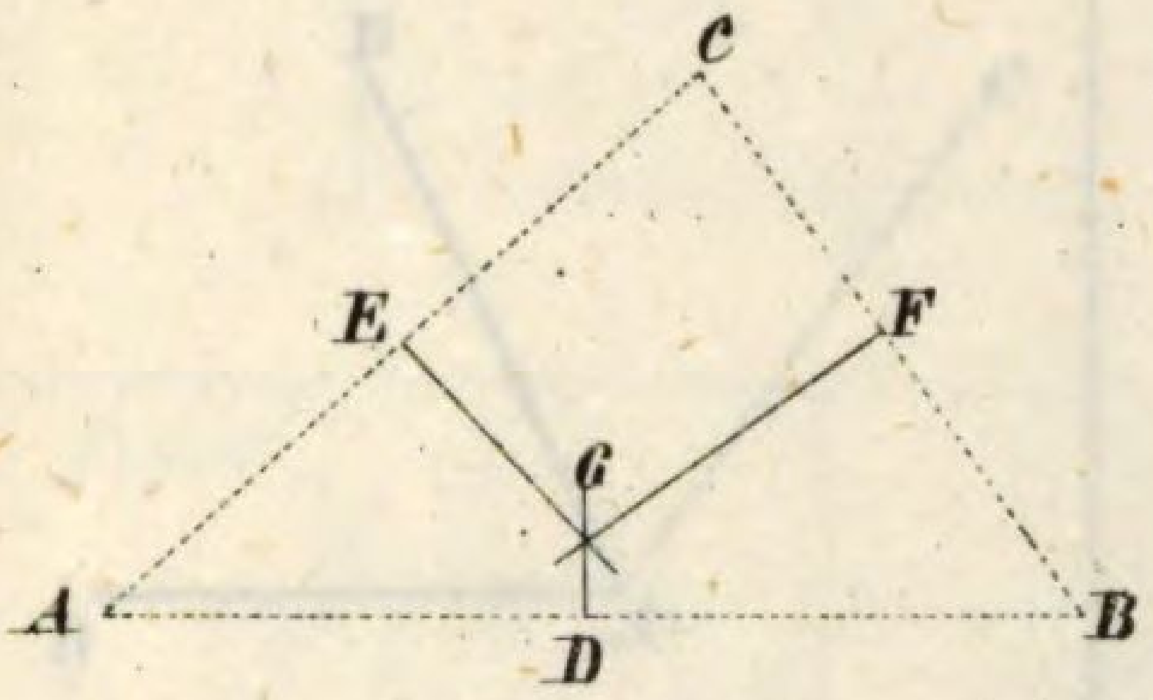


Fig. 78

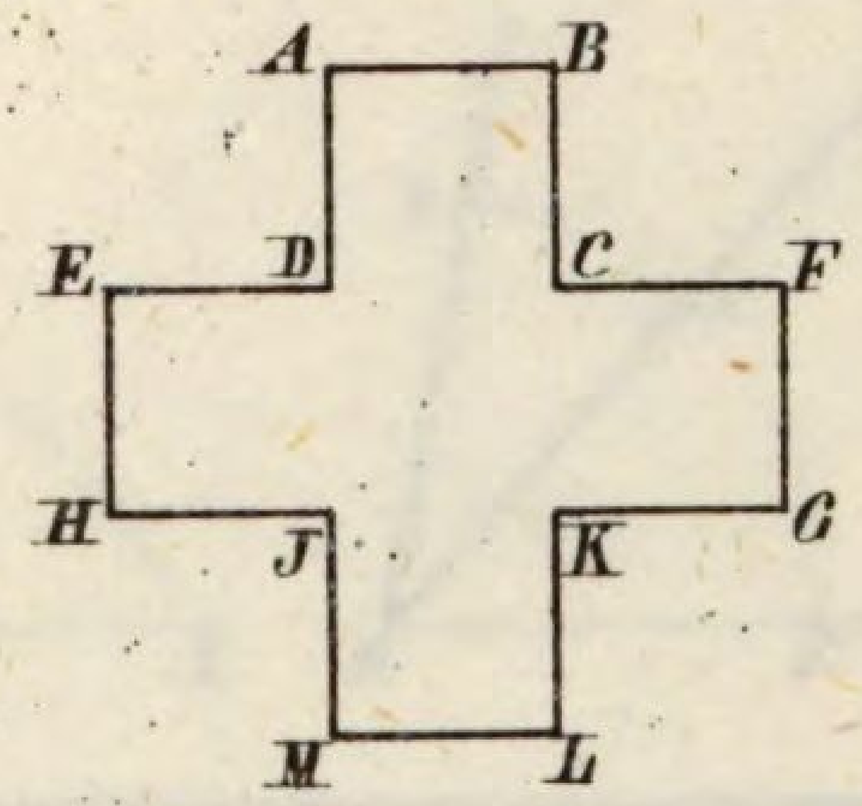


Fig. 80.

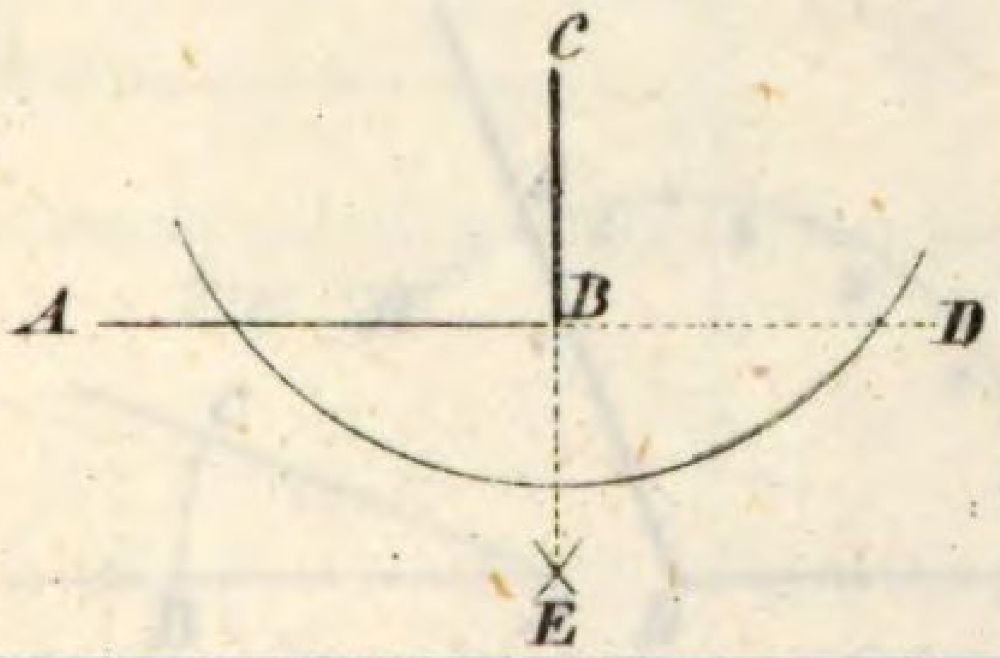


Fig. 81.

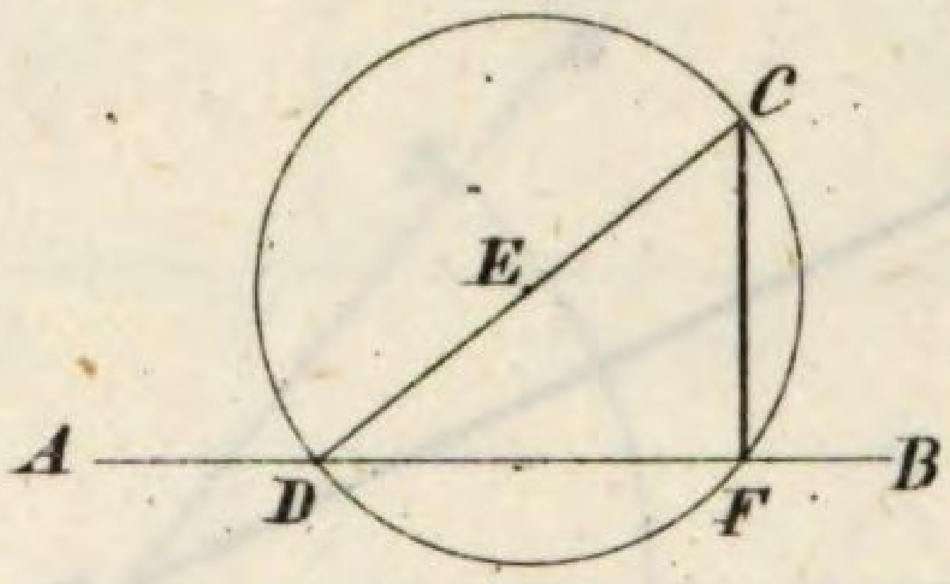


Fig. 82.

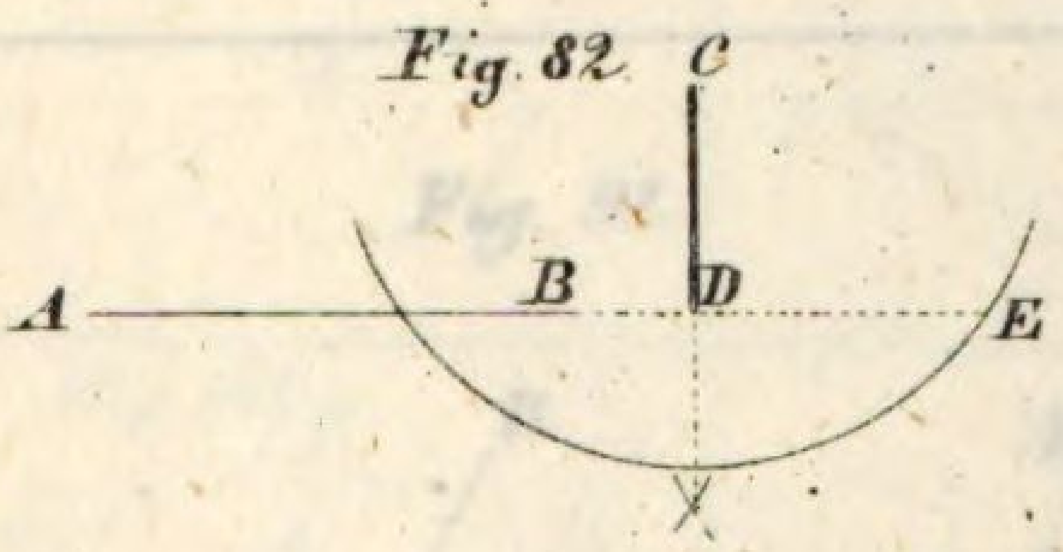


Fig. 83.

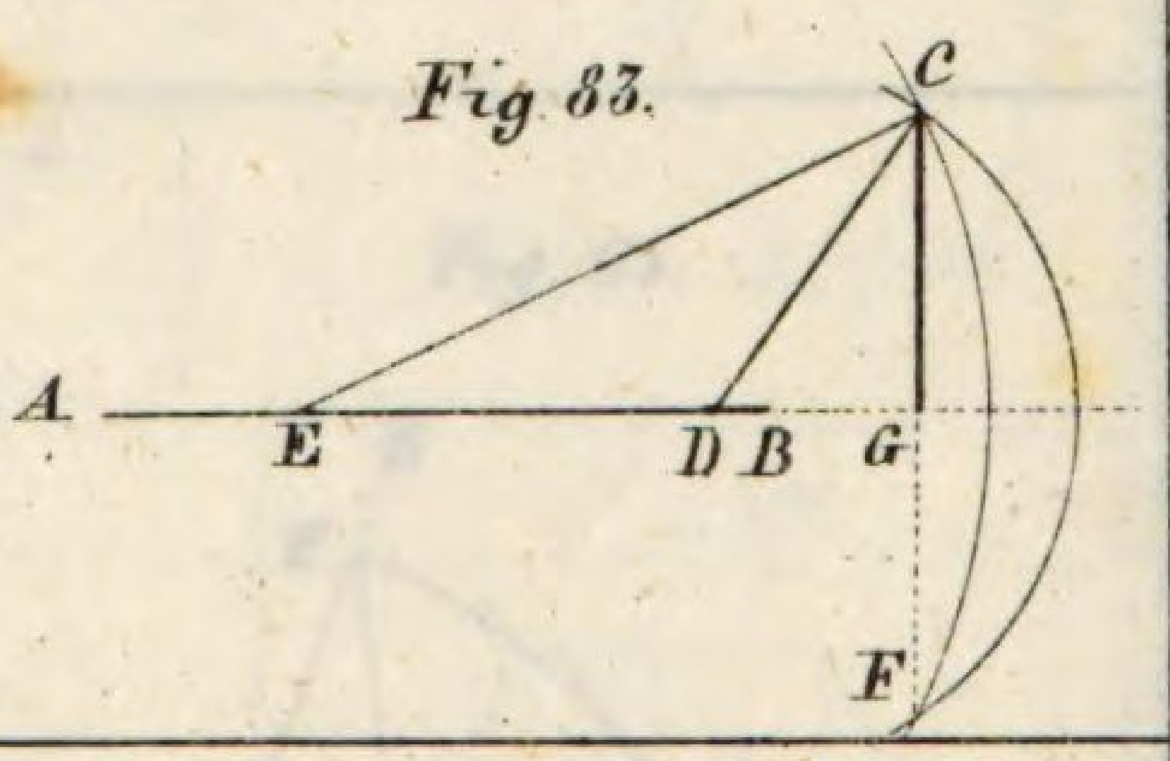


Fig. 84.

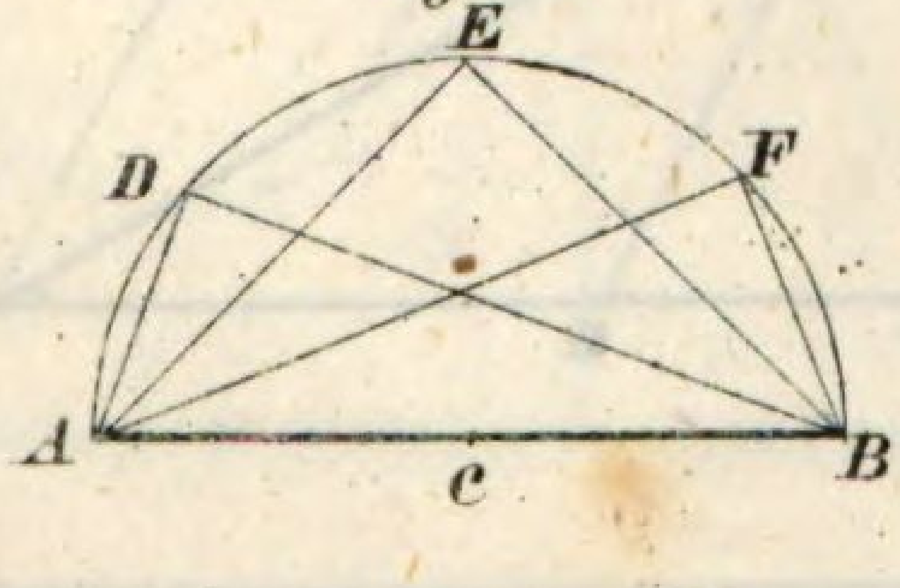


Fig. 85.

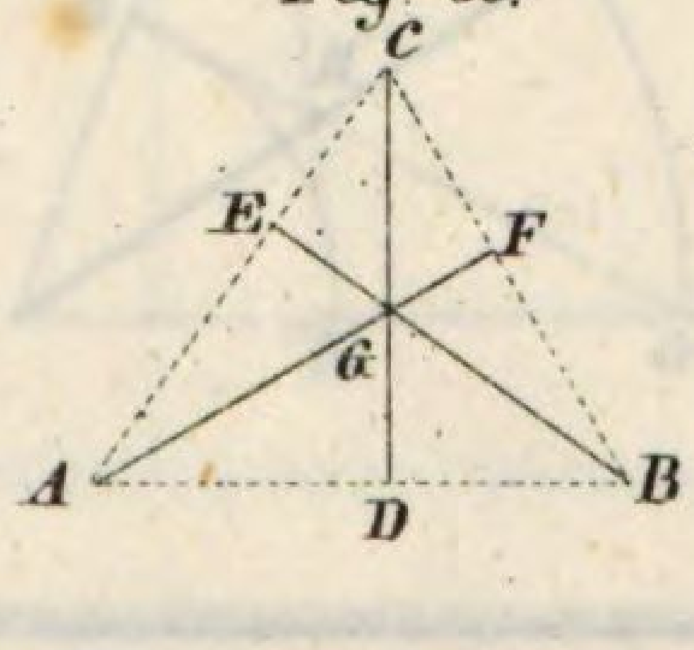


Fig. 86.

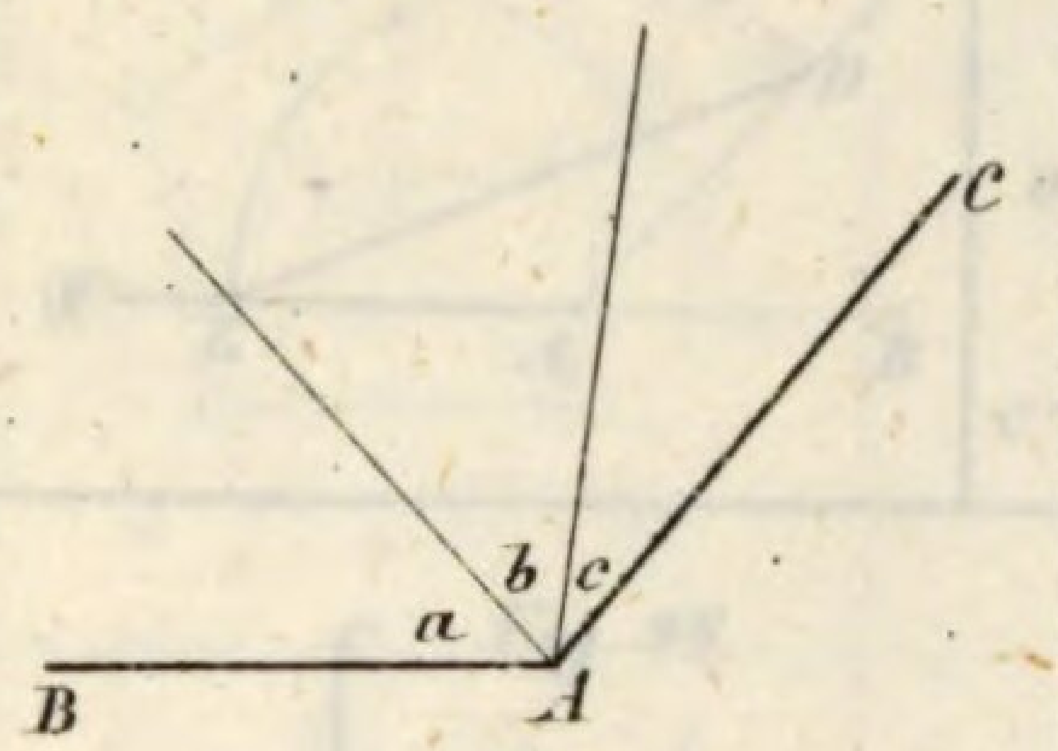


Fig. 87.

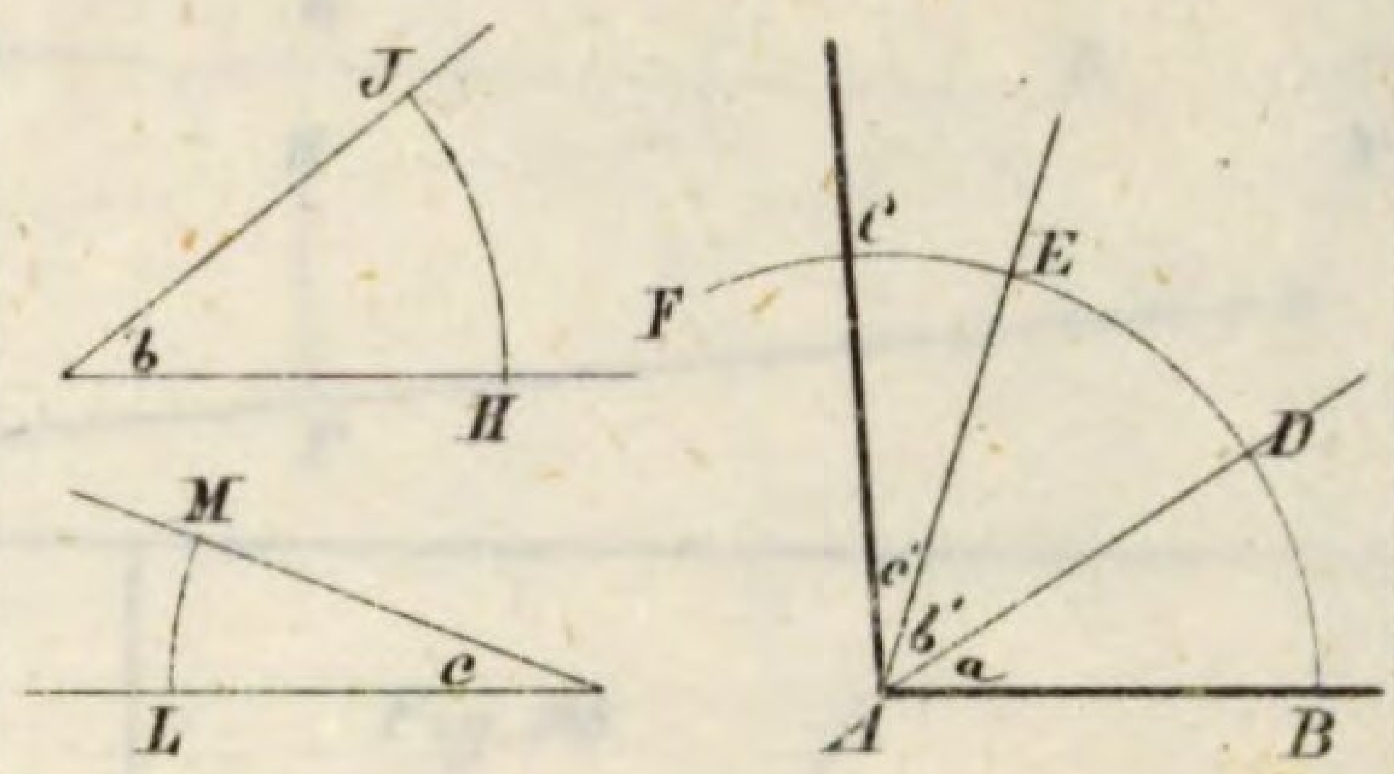


Fig. 88.

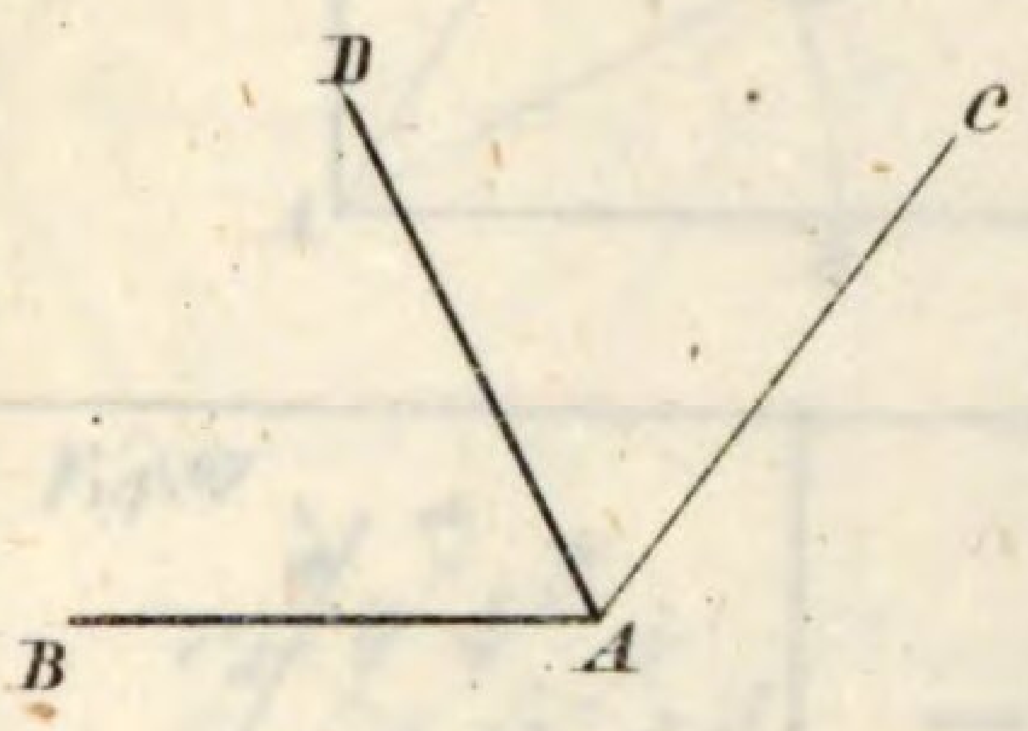


Fig. 89.

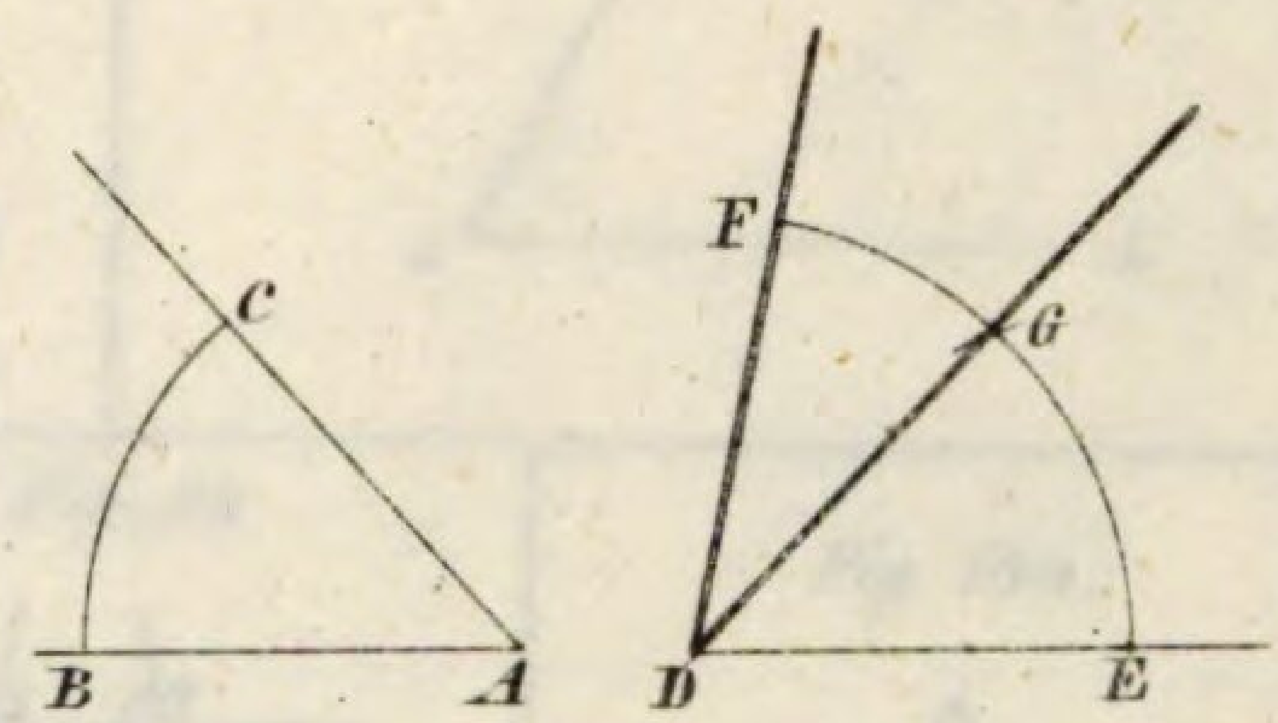


Fig. 90.

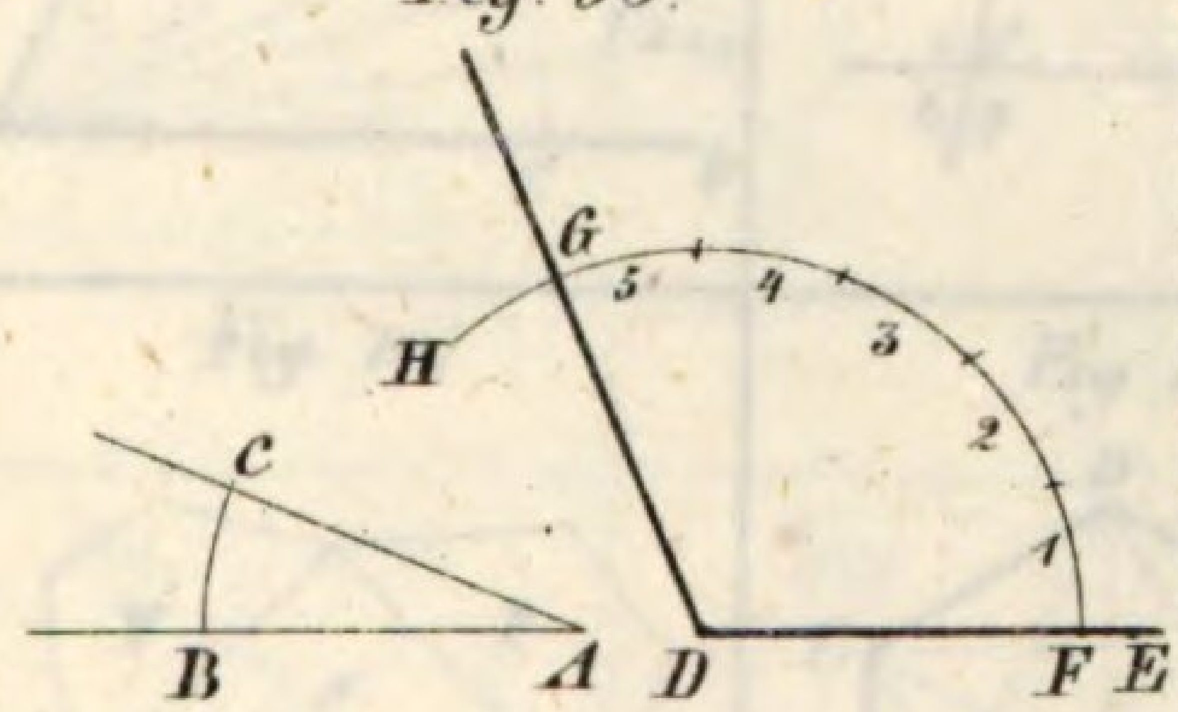


Fig. 91.

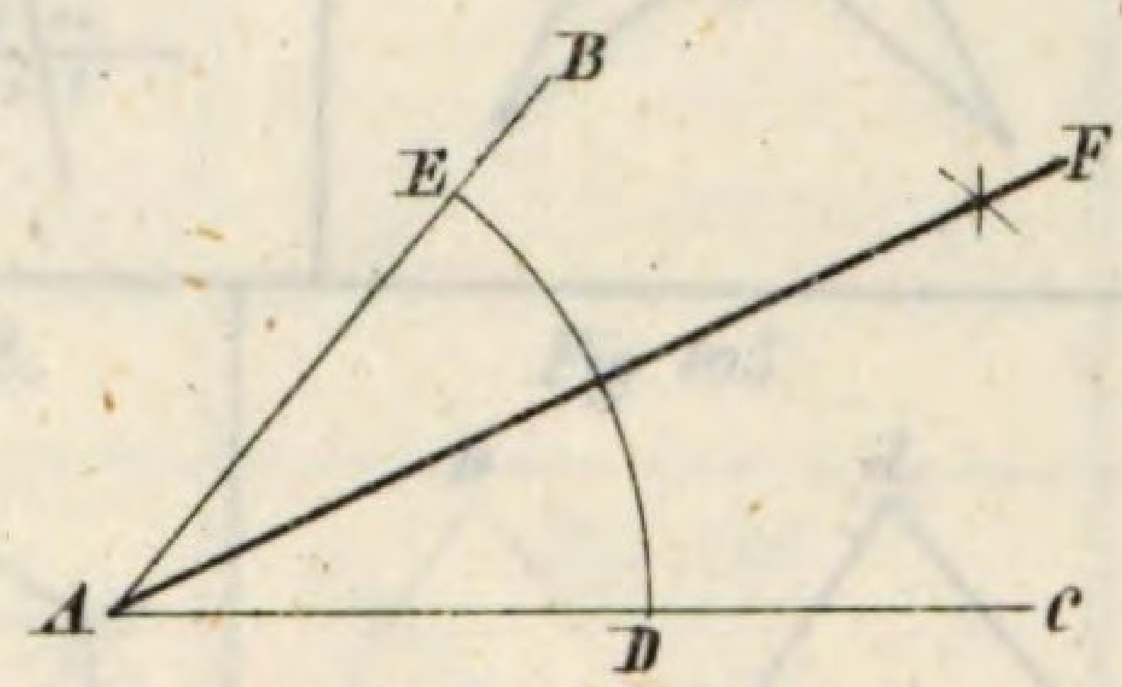


Fig. 92.

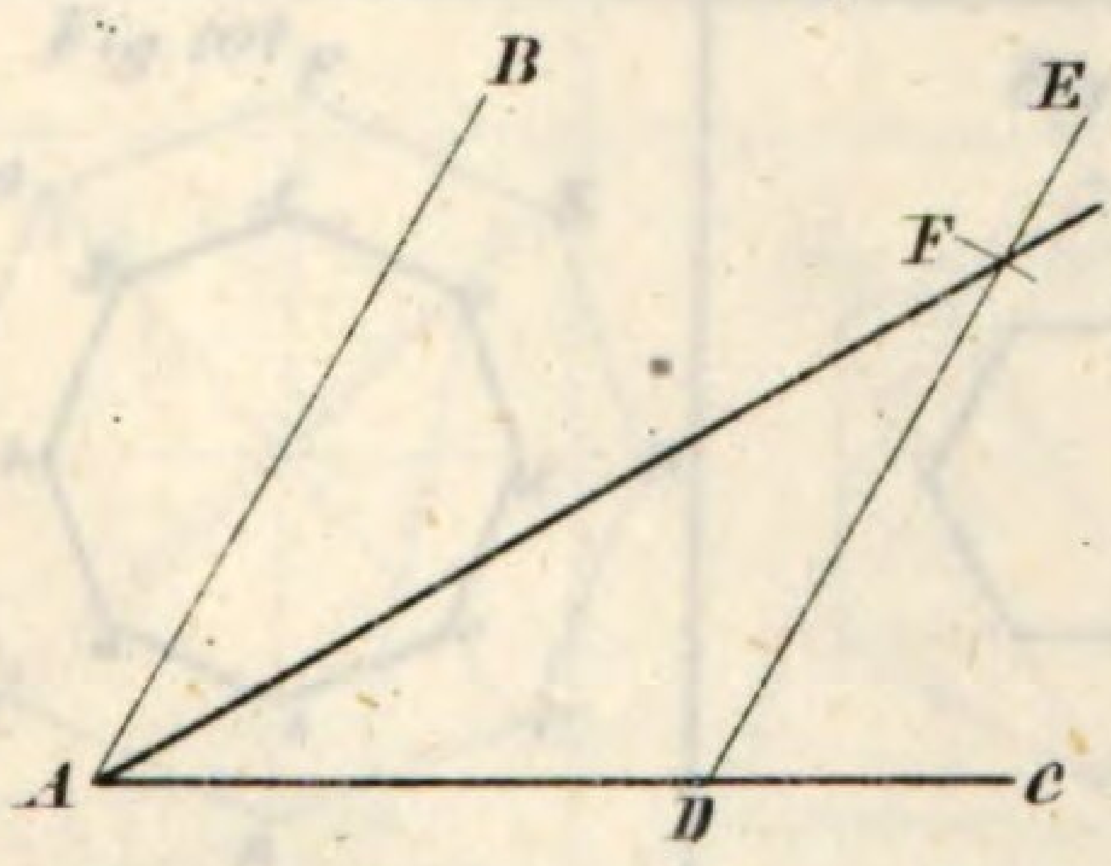
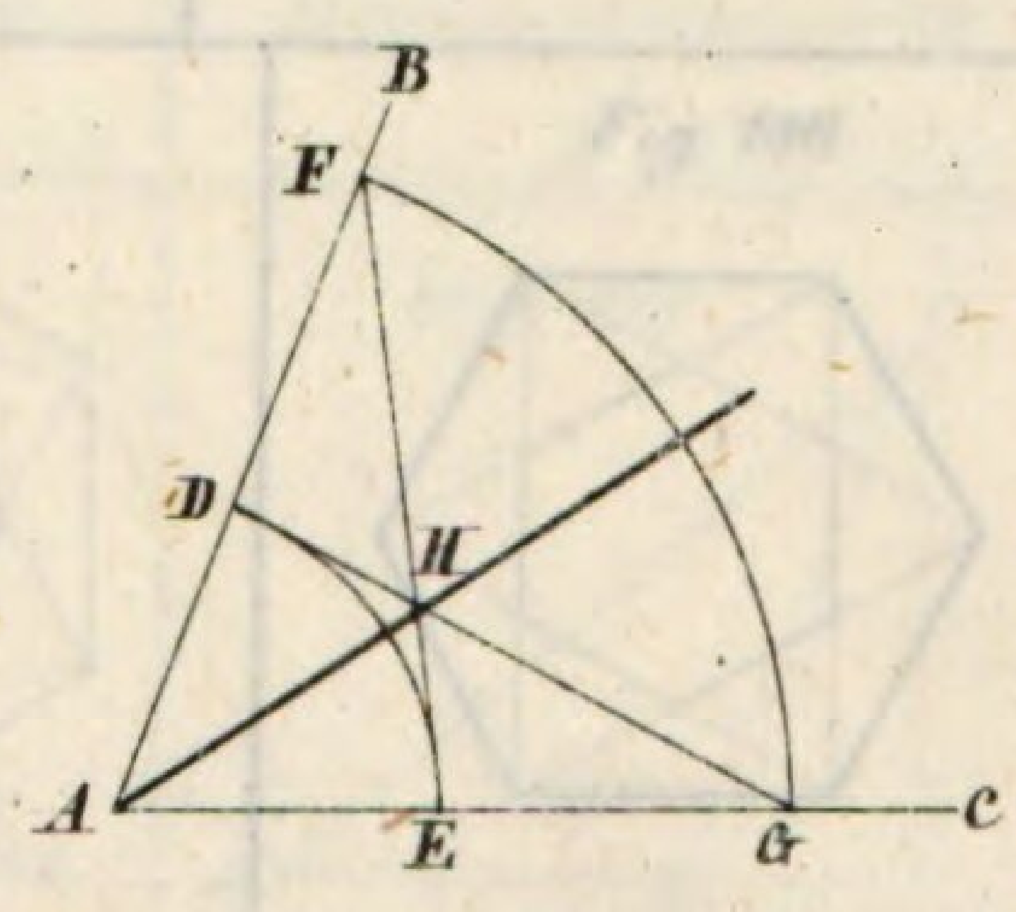
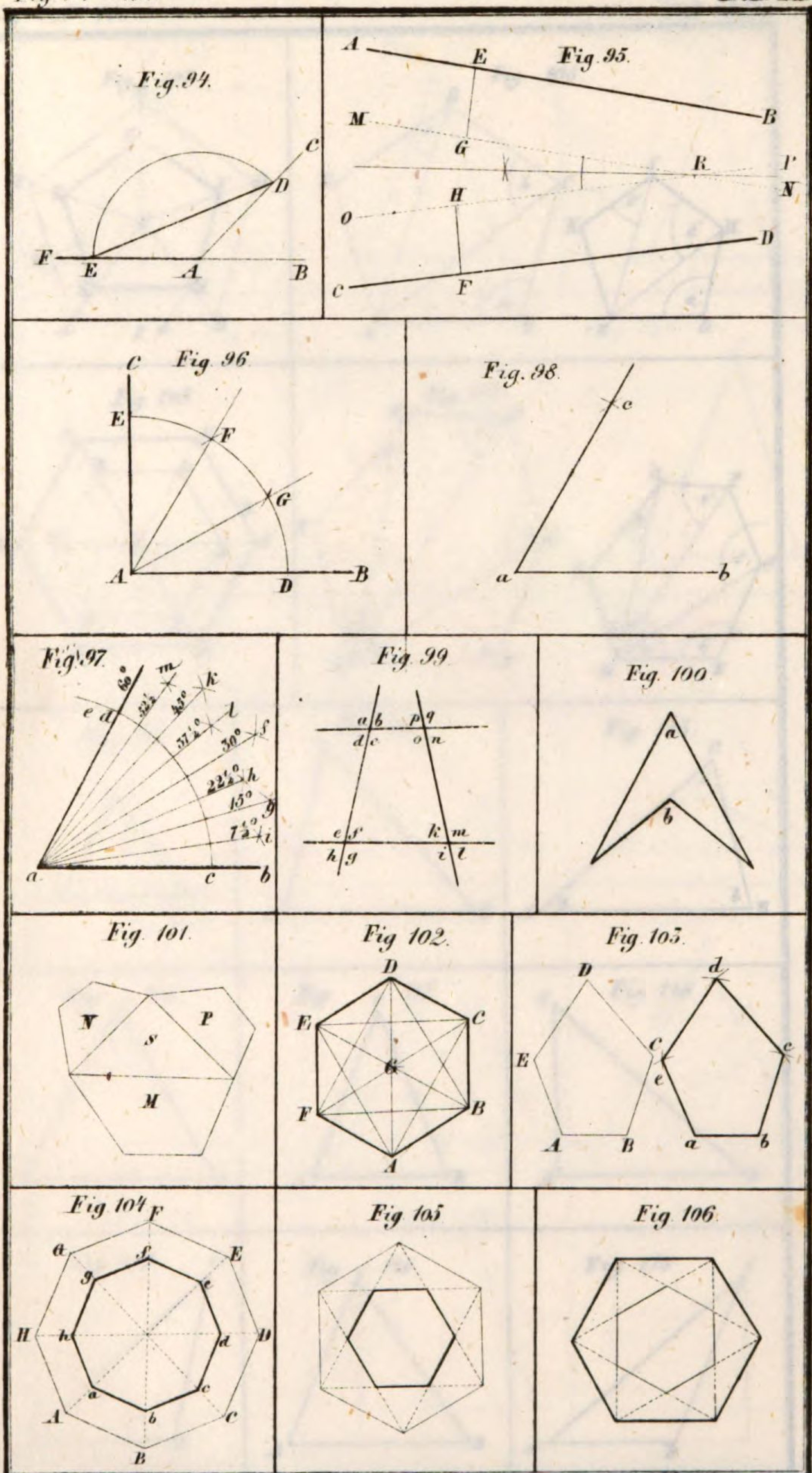
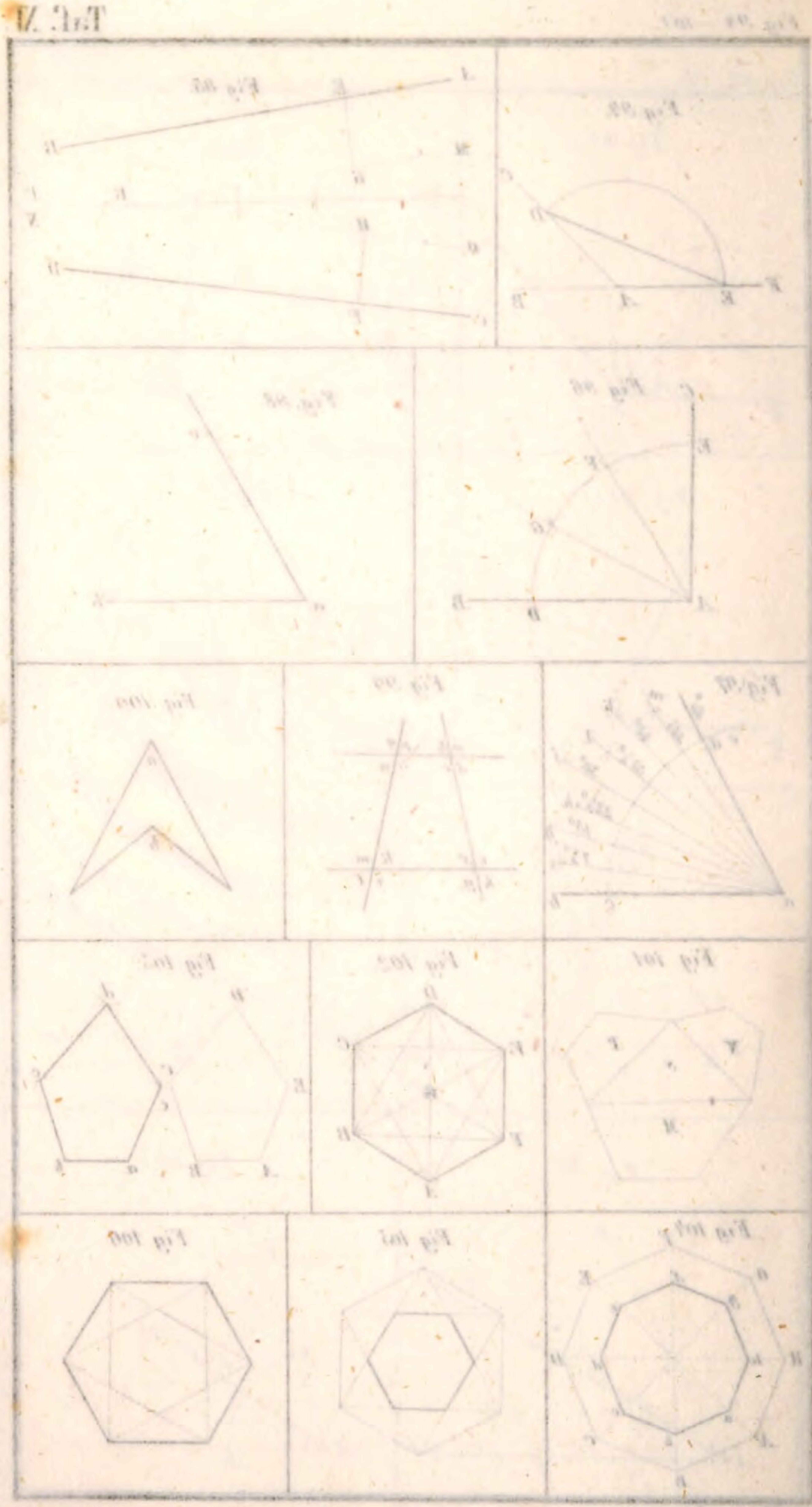


Fig. 93.




Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 98.
Fig. 97.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig 102.
Fig. 103.
Fig 104
Fig 105
Fig 106



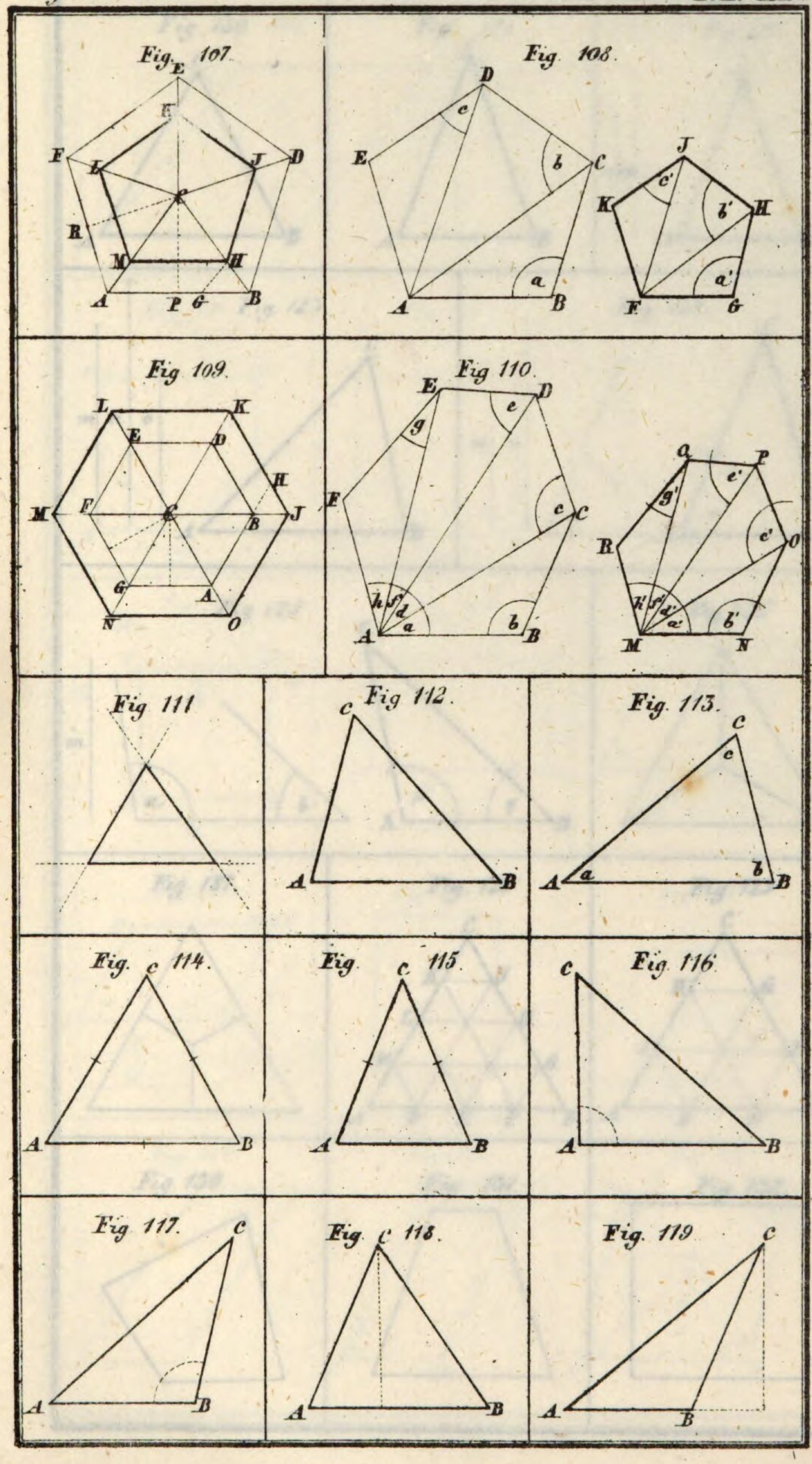

Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.

Fig. 120

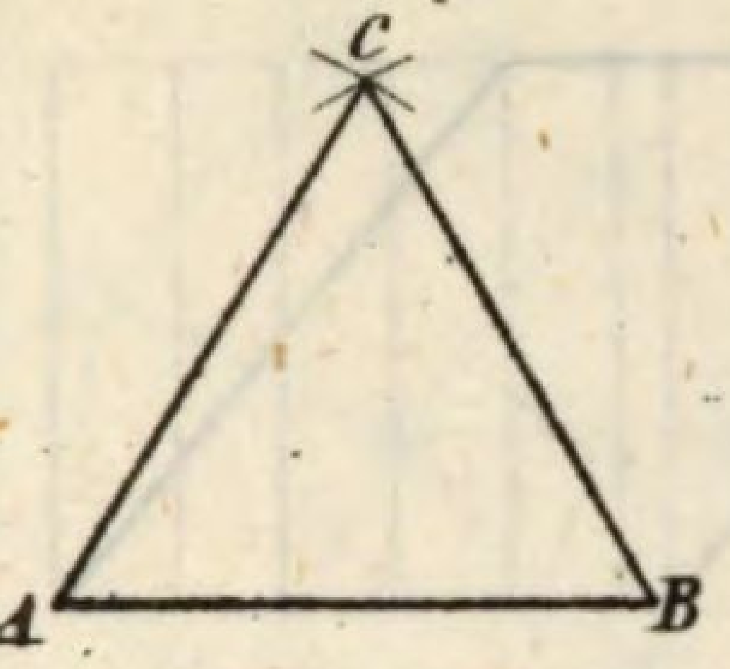


Fig. 121

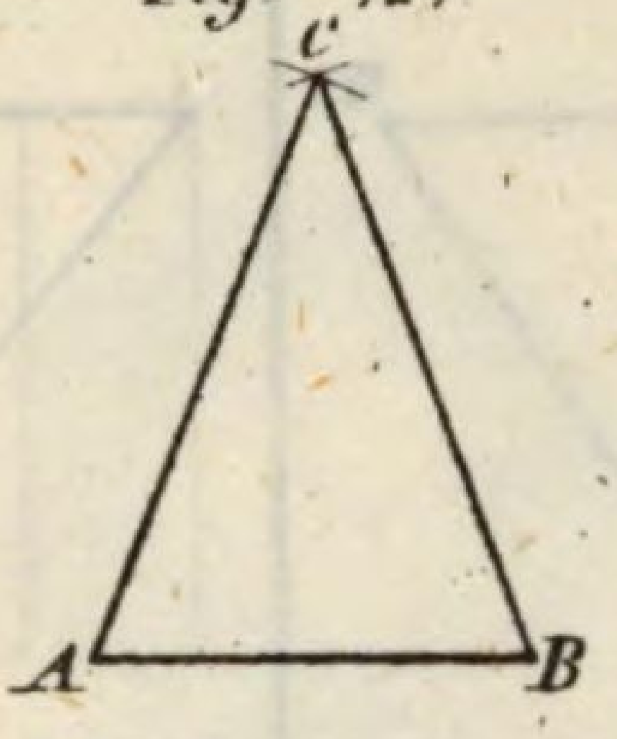


Fig. 122

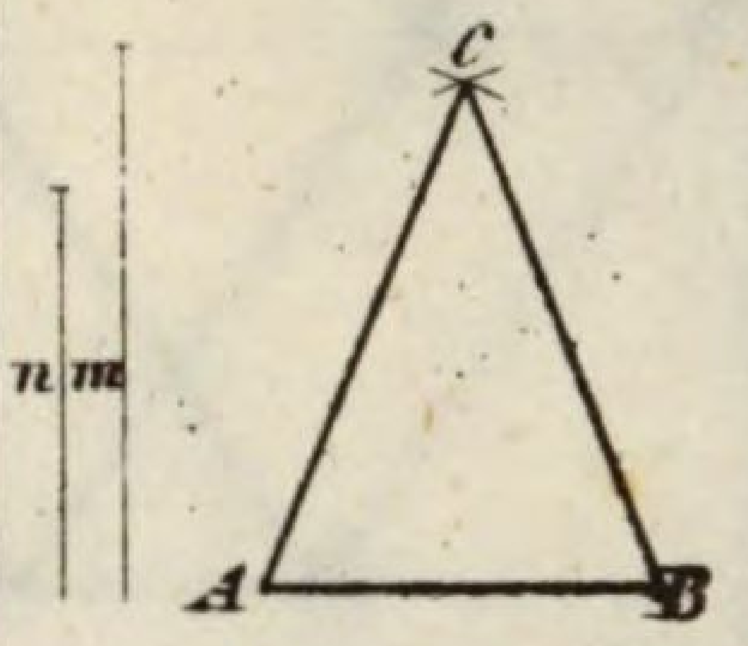


Fig. 123

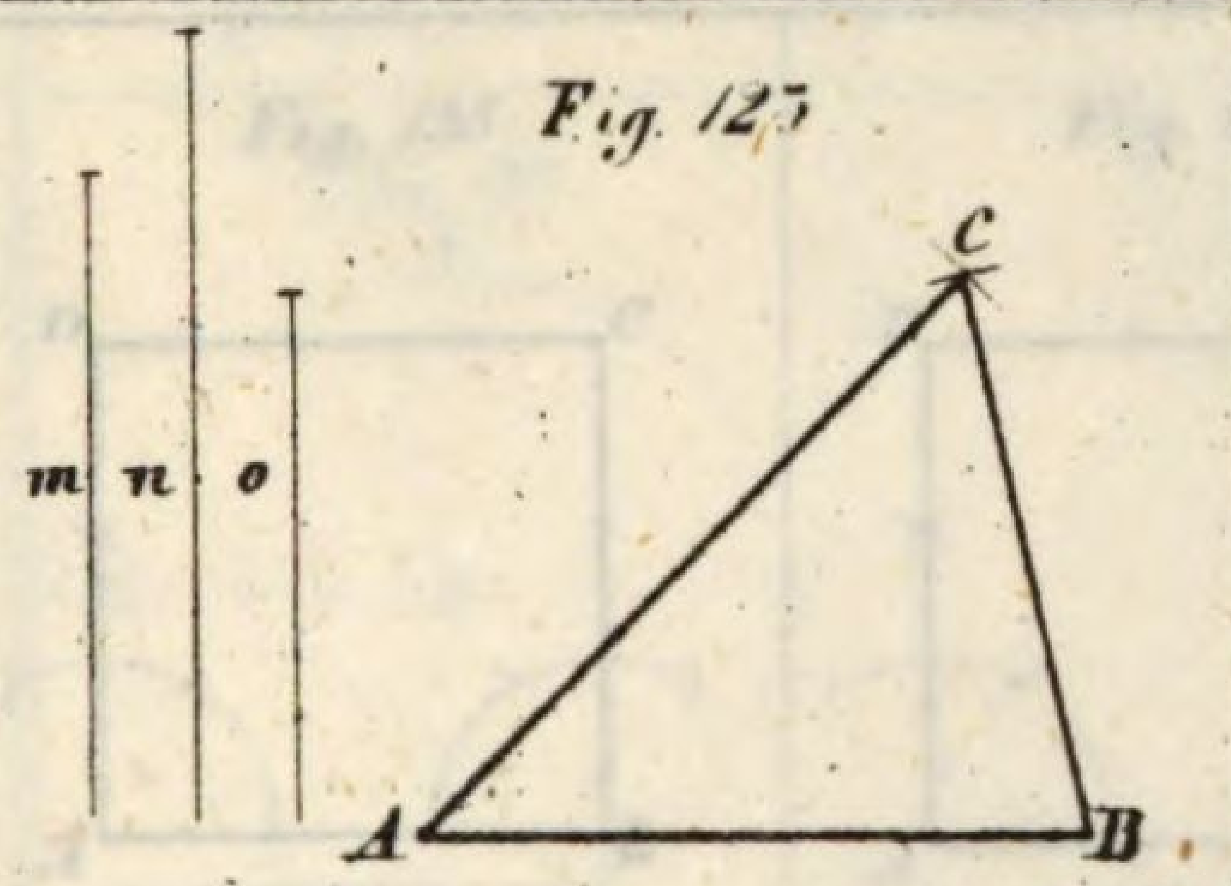


Fig. 124

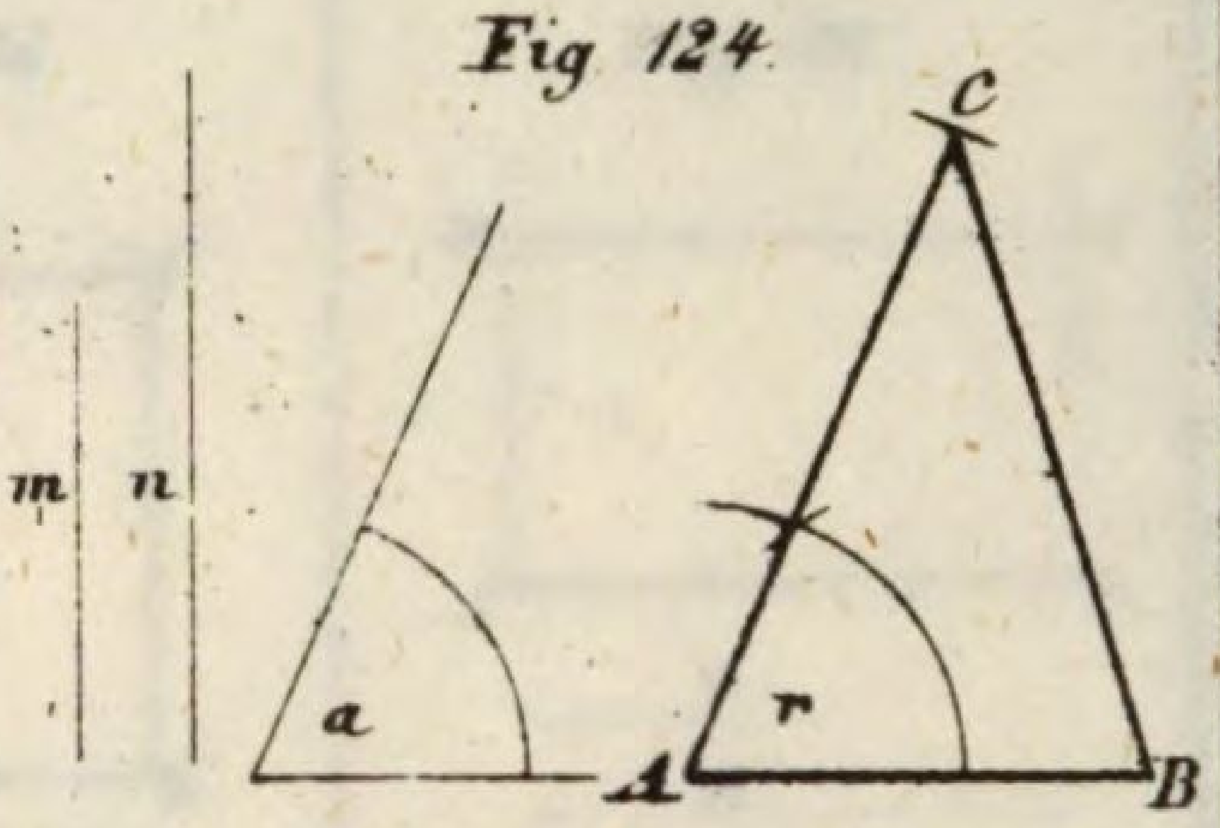


Fig. 125

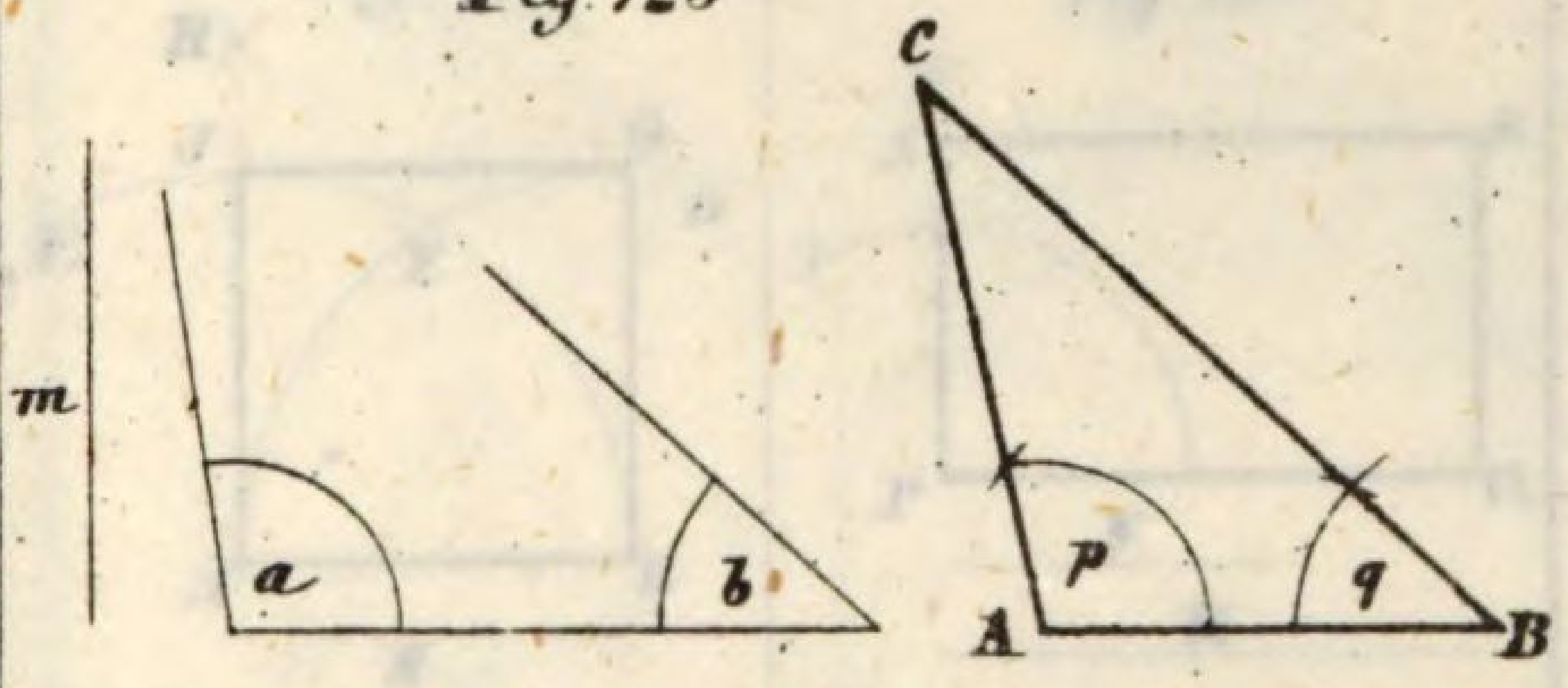


Fig. 126

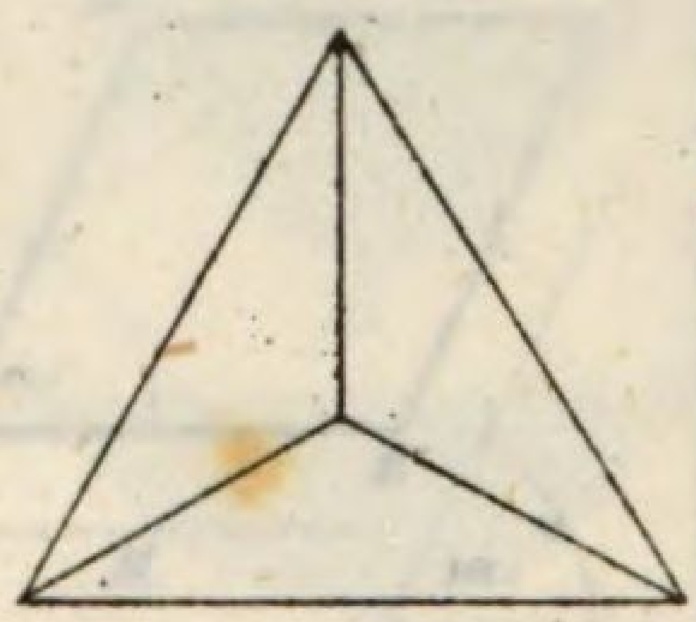


Fig. 127

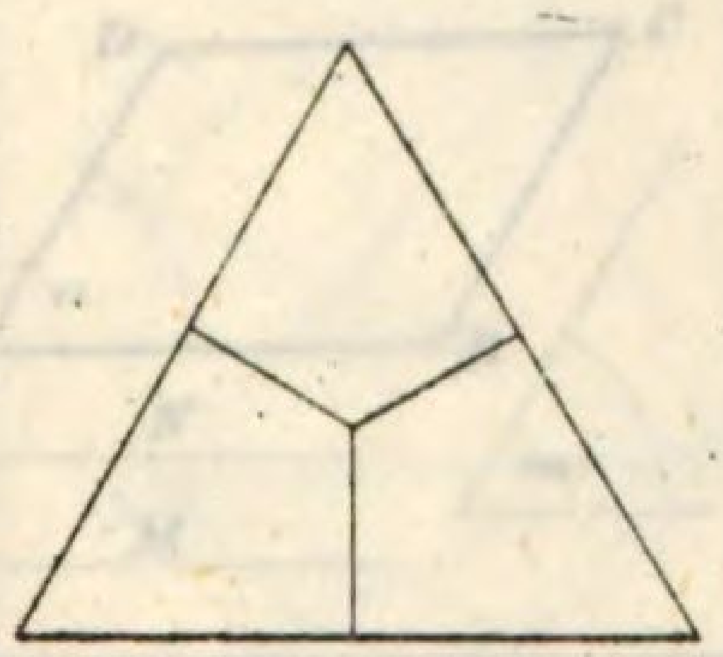


Fig. 128

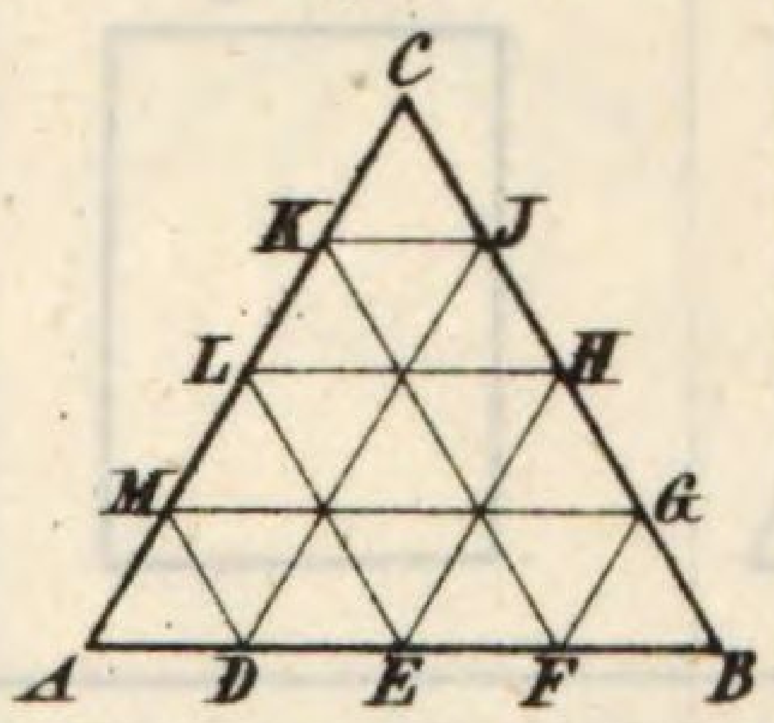


Fig. 129

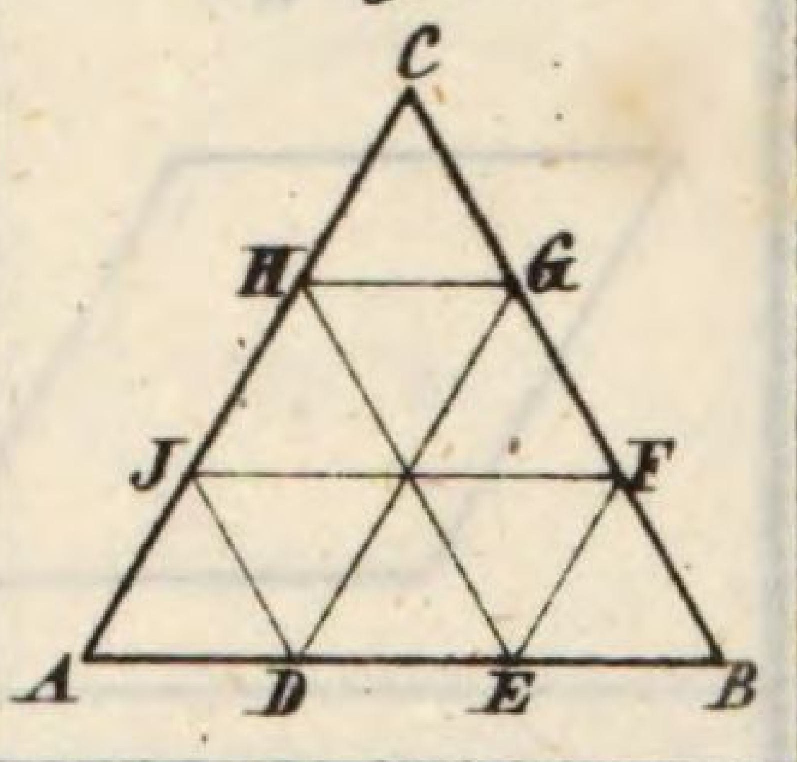


Fig. 130

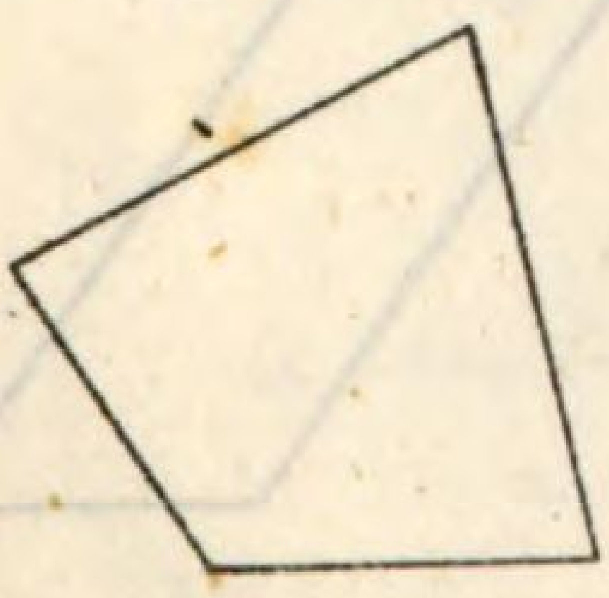


Fig. 131

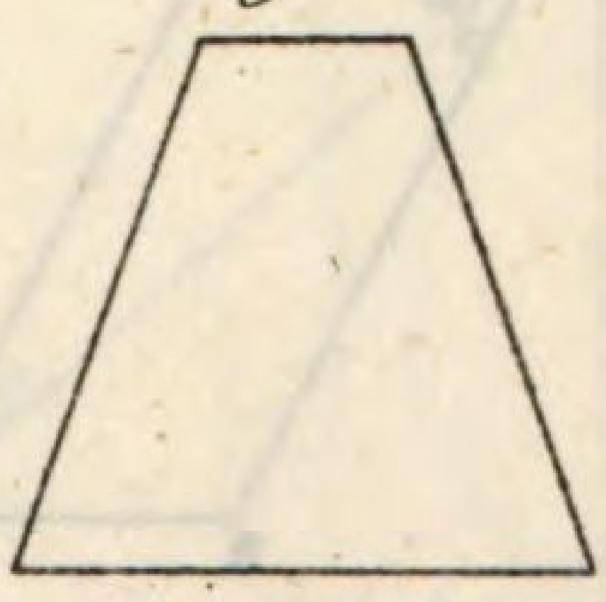


Fig. 132.



Fig. 133.

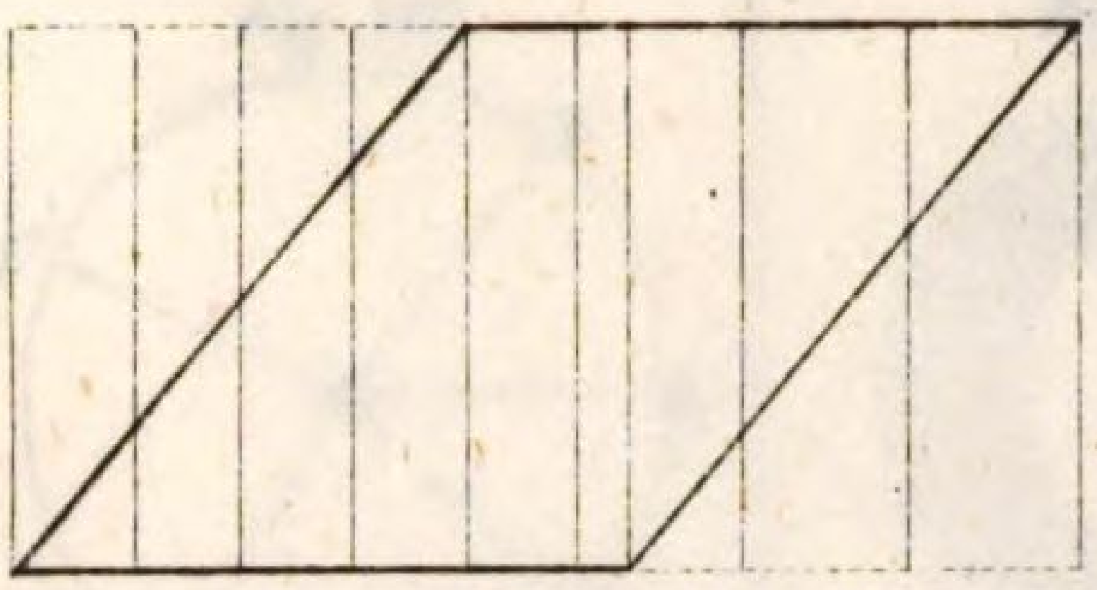


Fig. 134

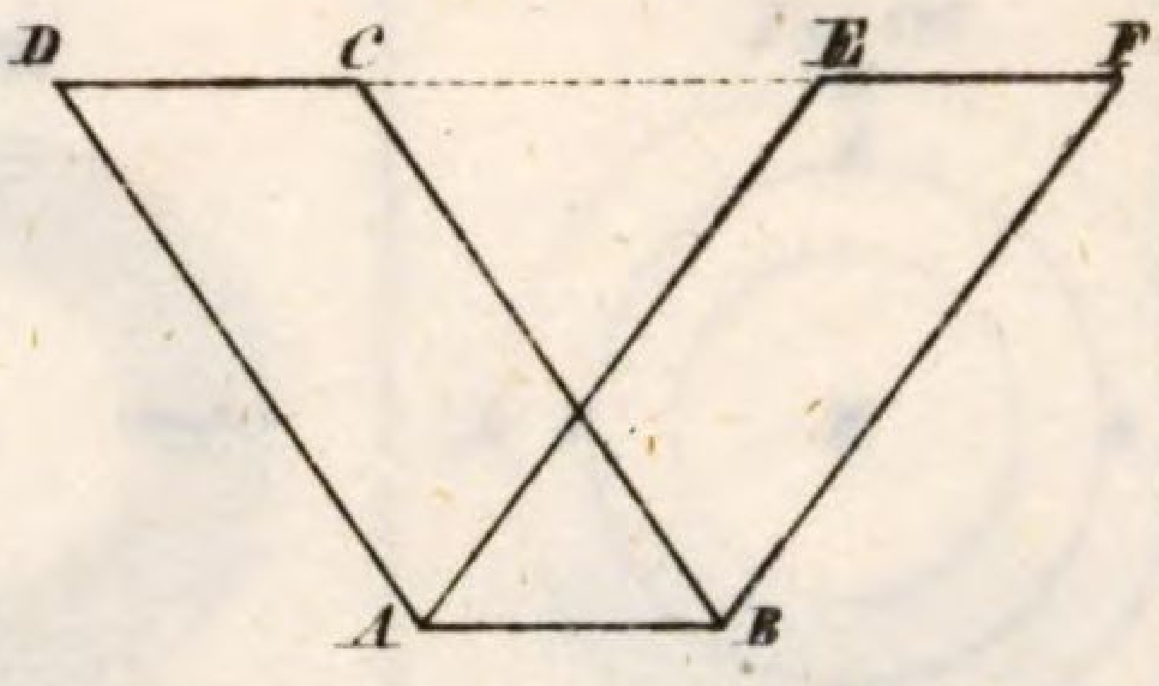


Fig. 135.

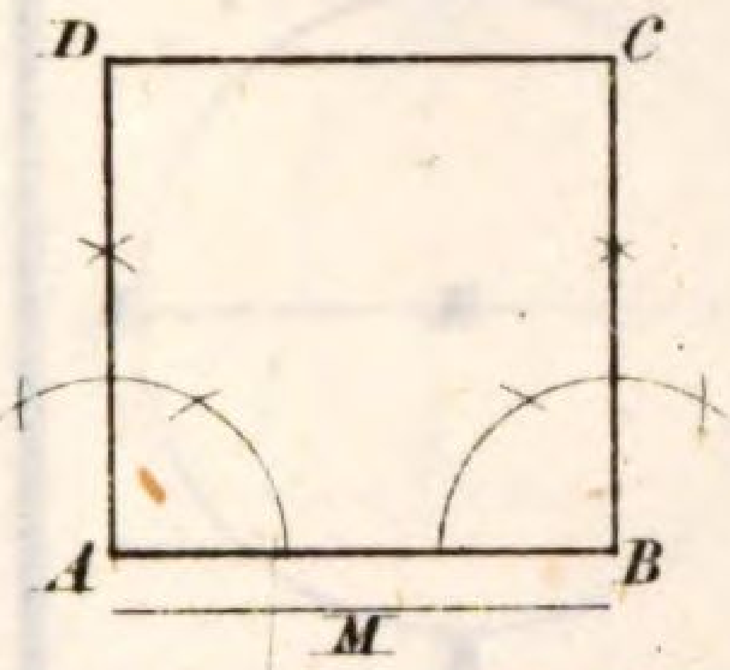


Fig. 136

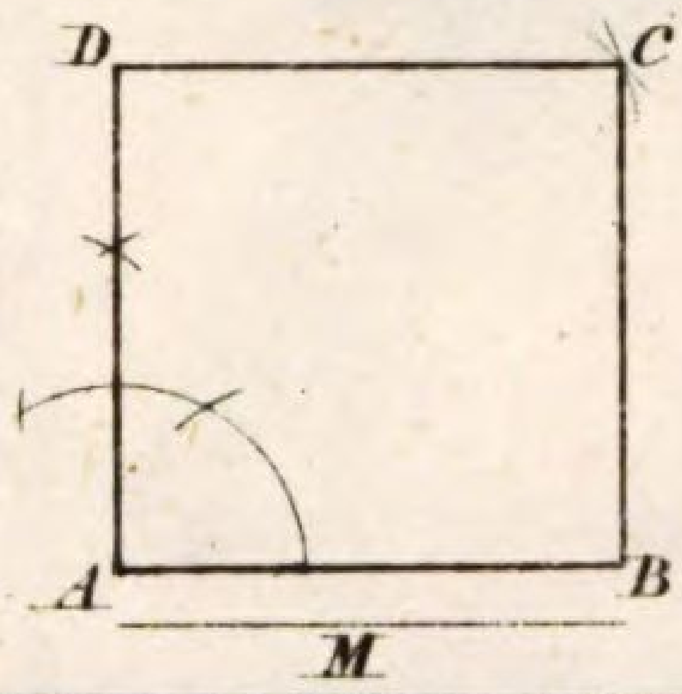


Fig. 137

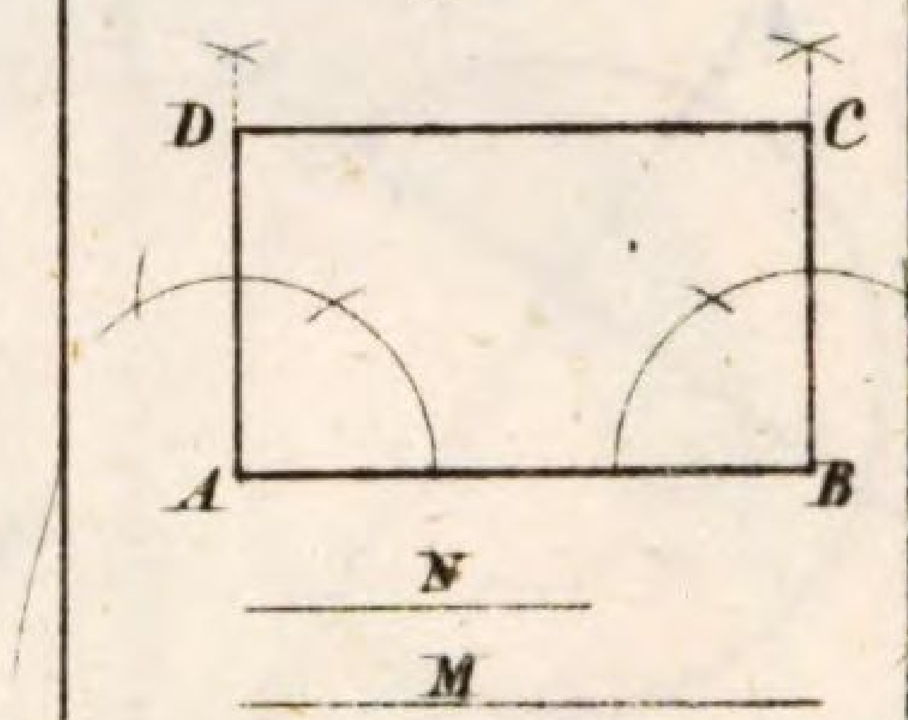


Fig. 138.

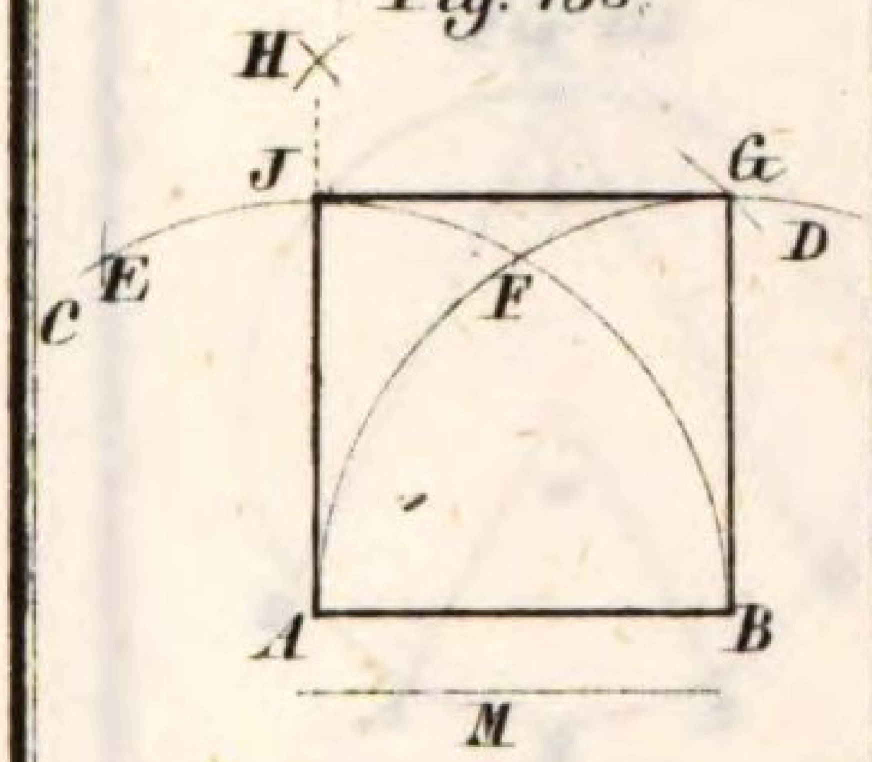


Fig. 139

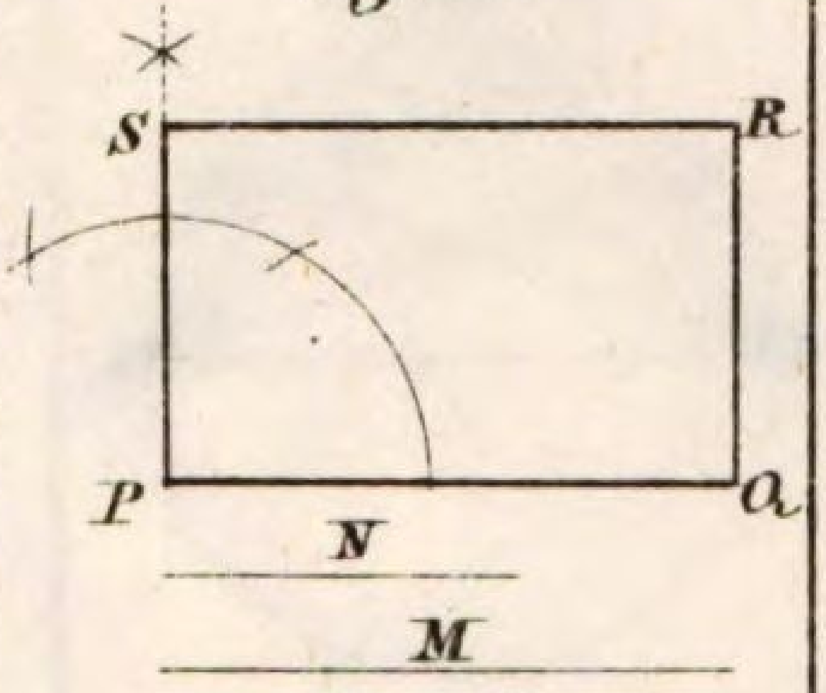


Fig. 140

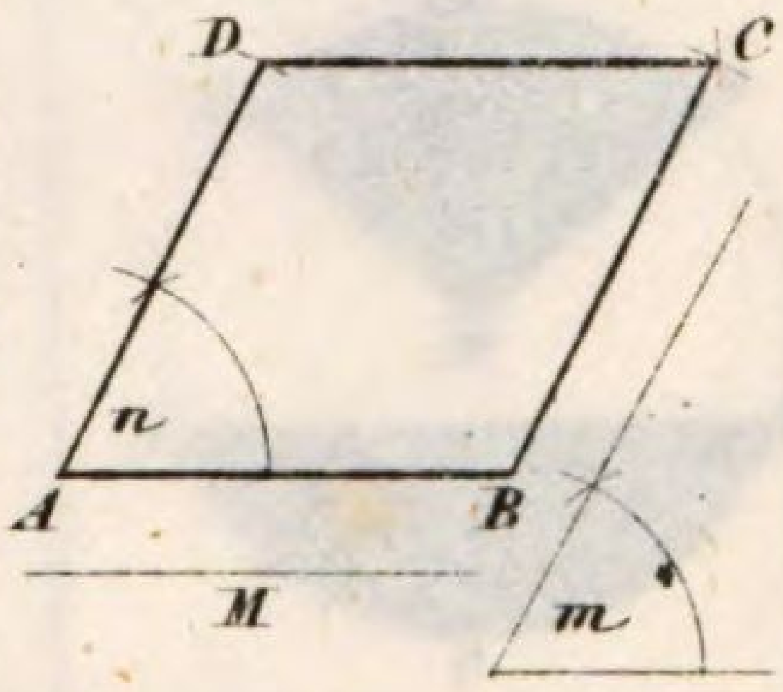


Fig. 141.

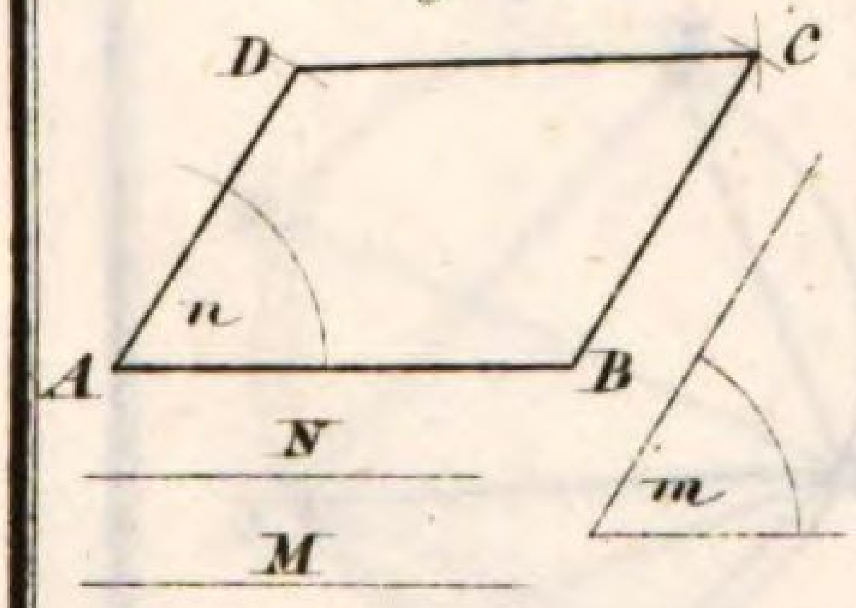


Fig. 142.

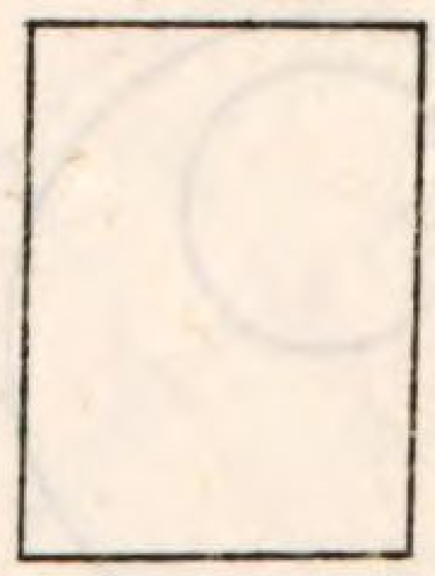


Fig. 143.

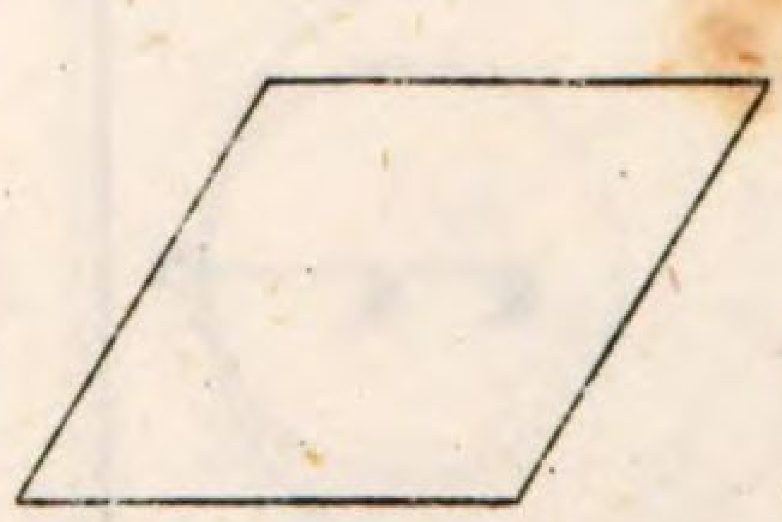


Fig. 144.

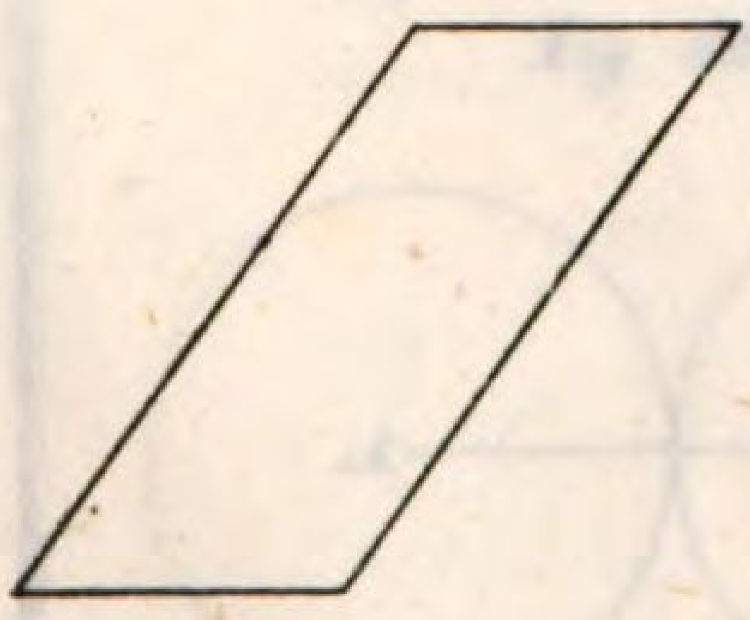


Fig. 145.

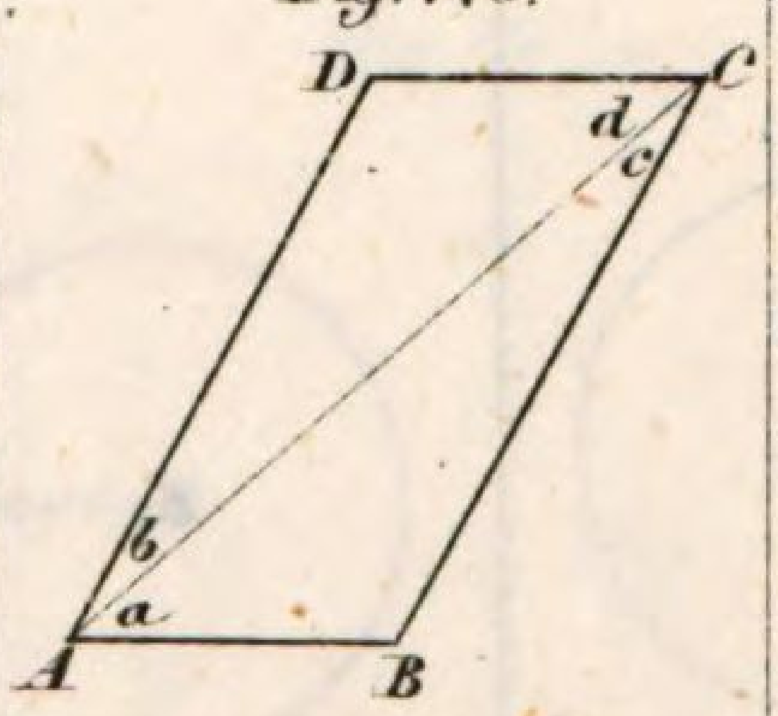
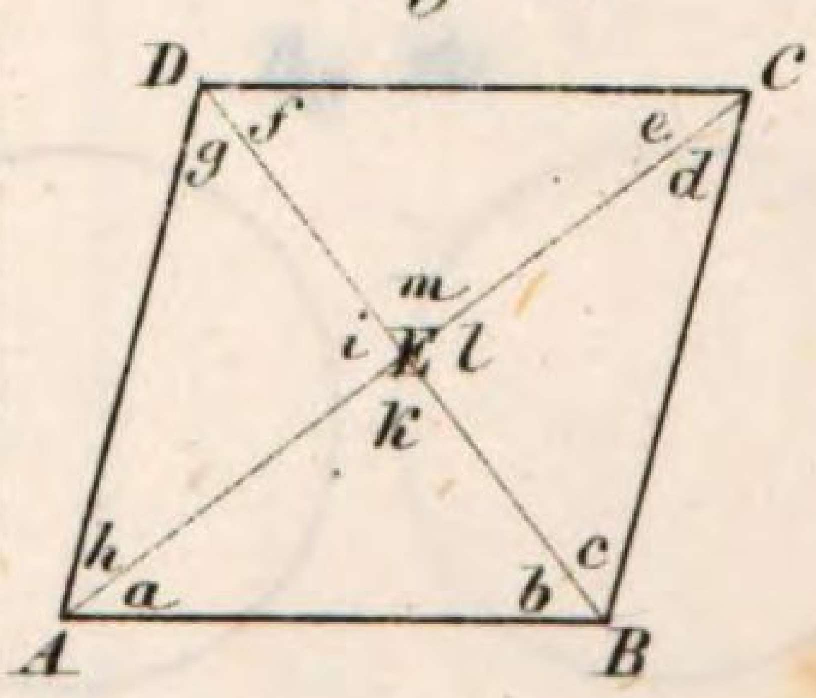


Fig 146



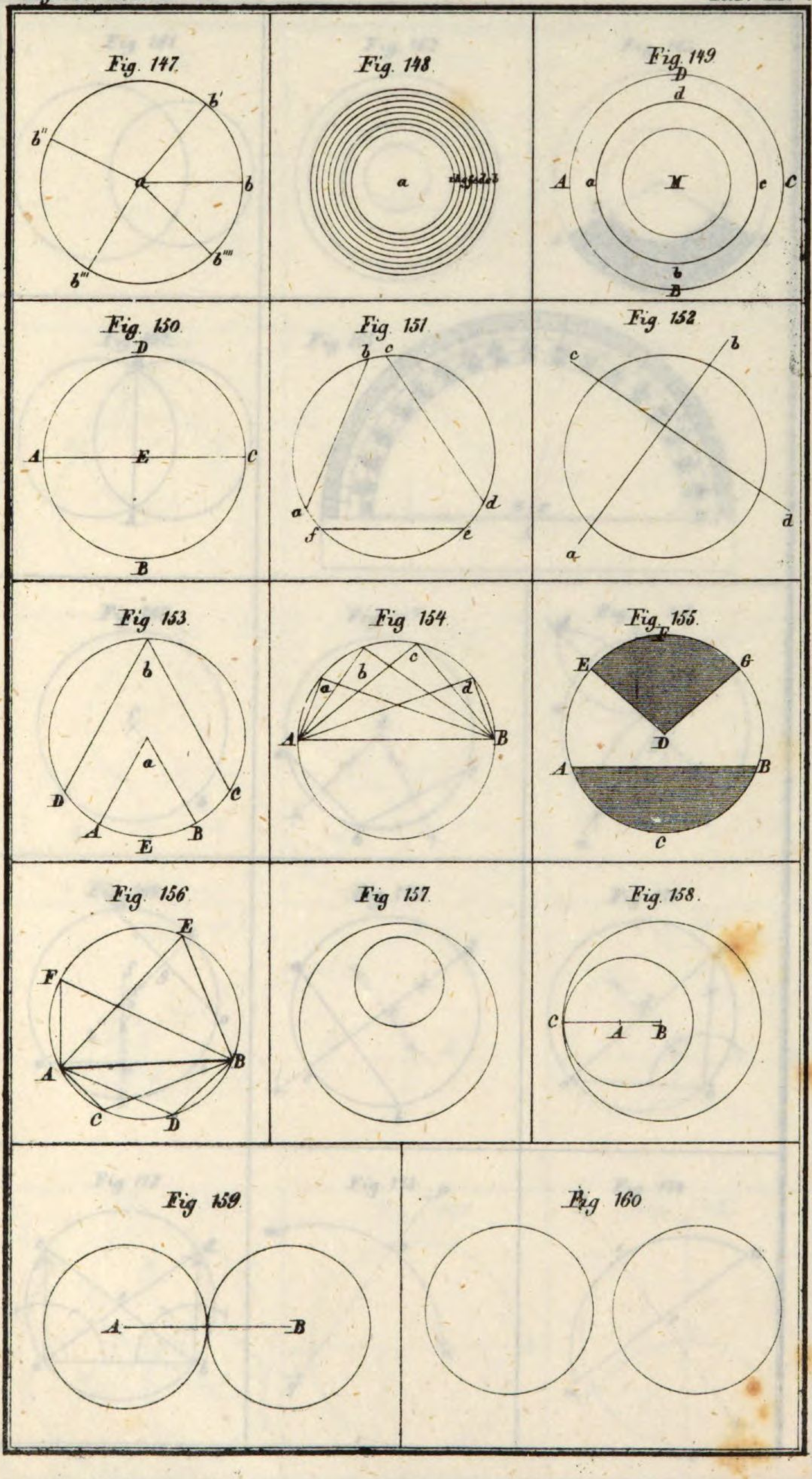

Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160.

Fig. 161.

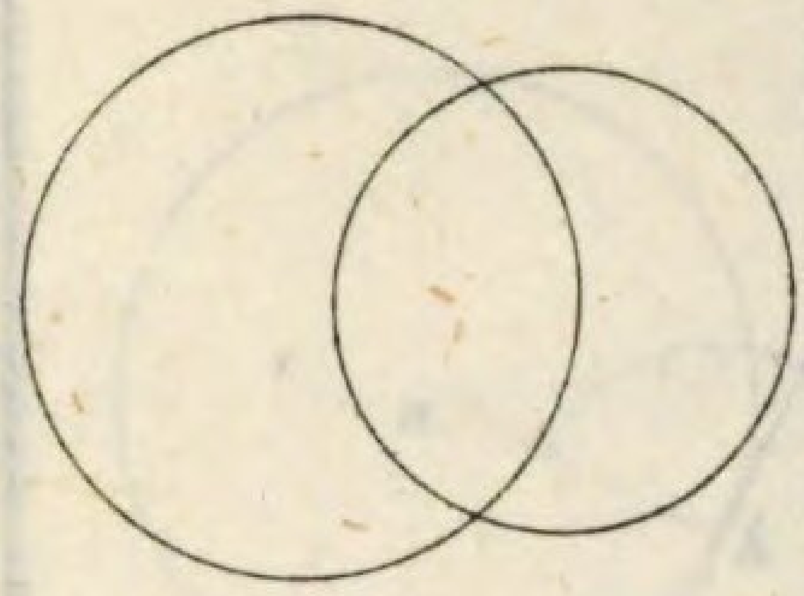


Fig. 162.

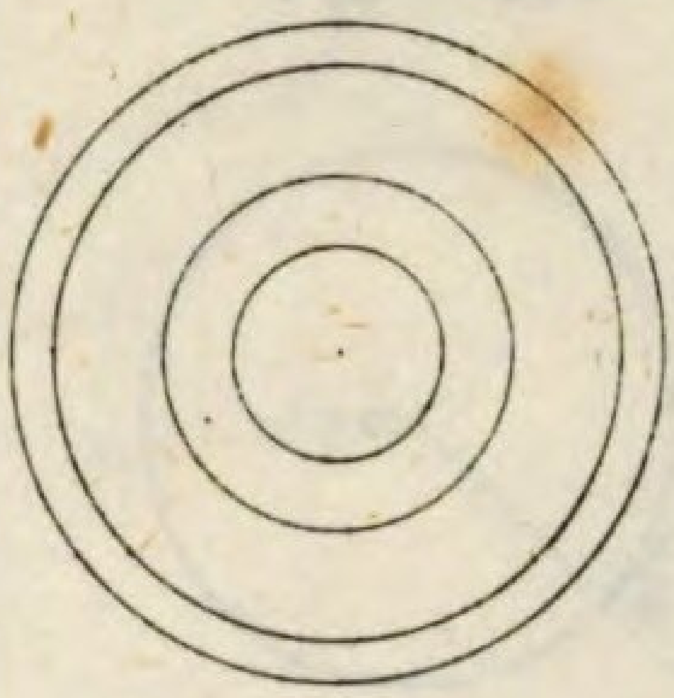


Fig. 163.

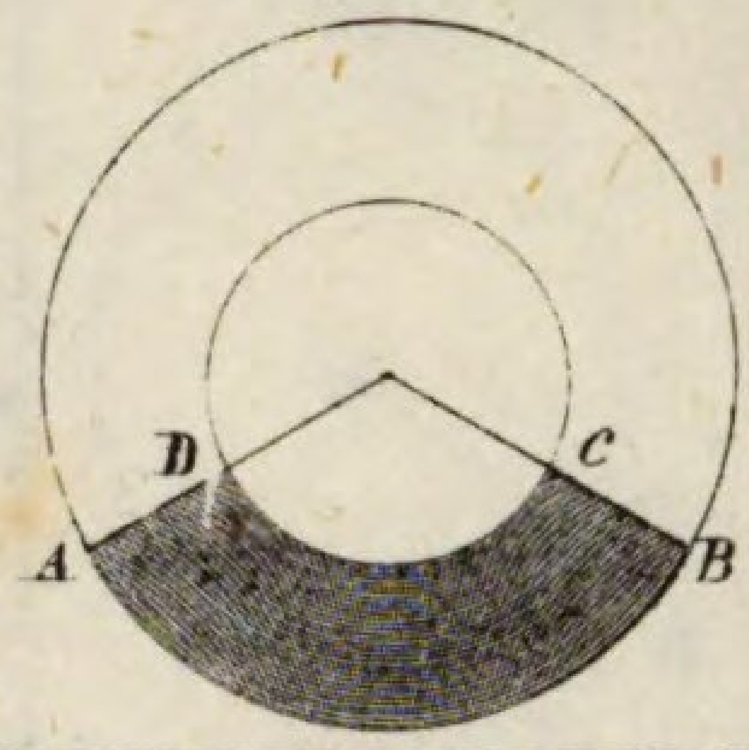


Fig. 164.

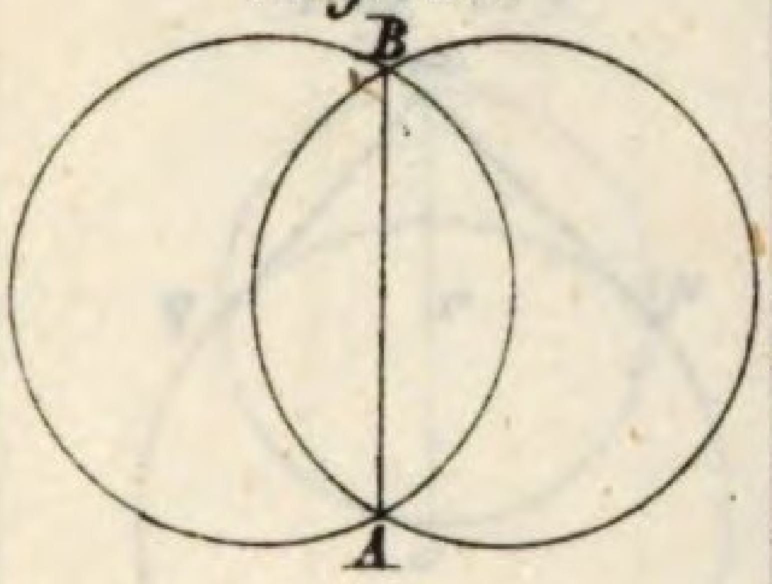


Fig. 165.

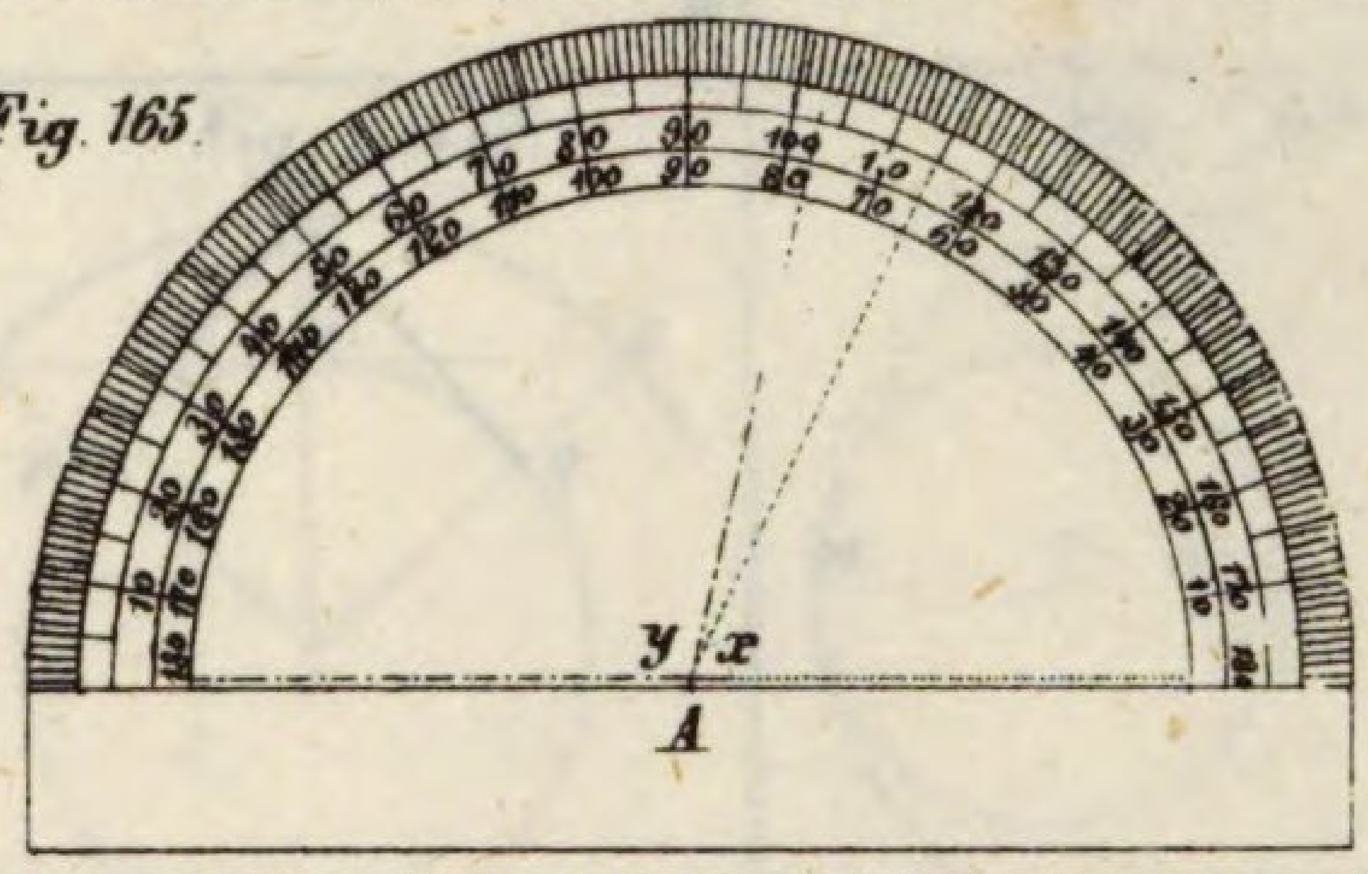


Fig. 166.

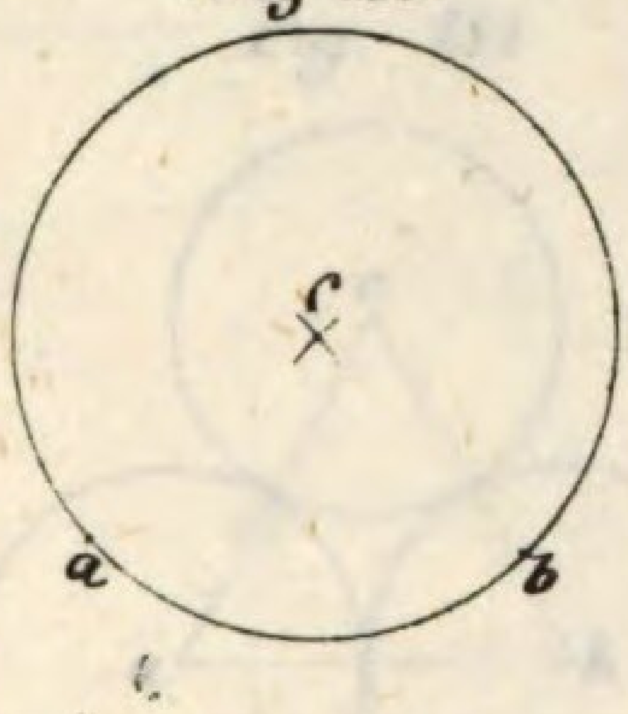


Fig. 167.

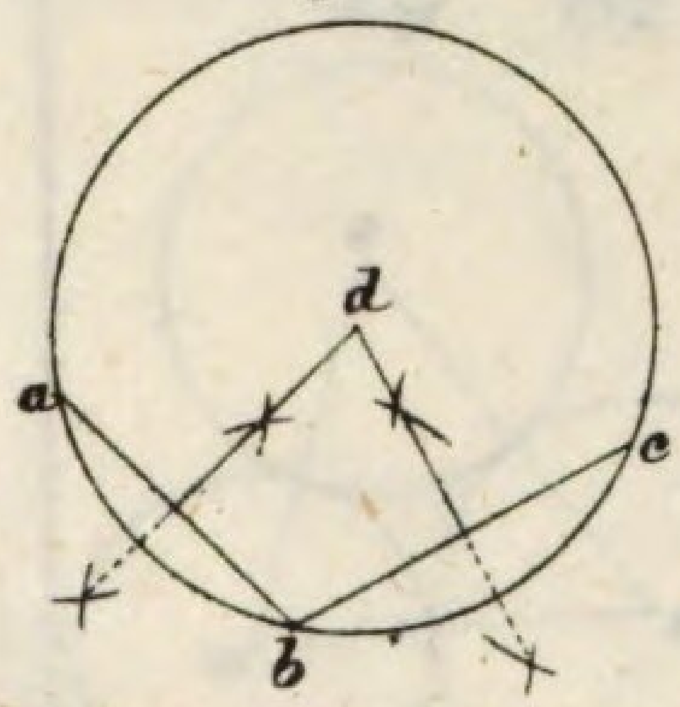


Fig. 168.

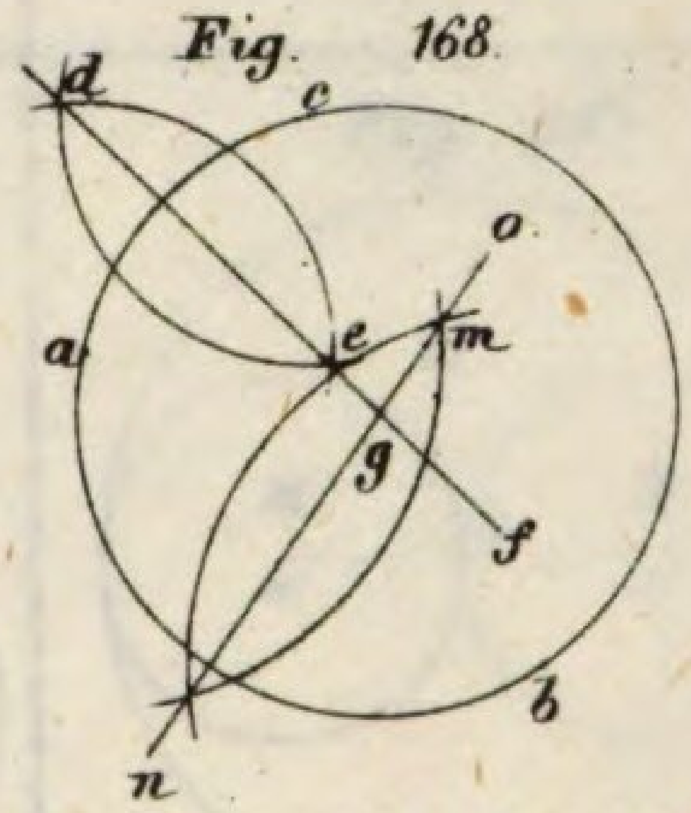


Fig. 169.

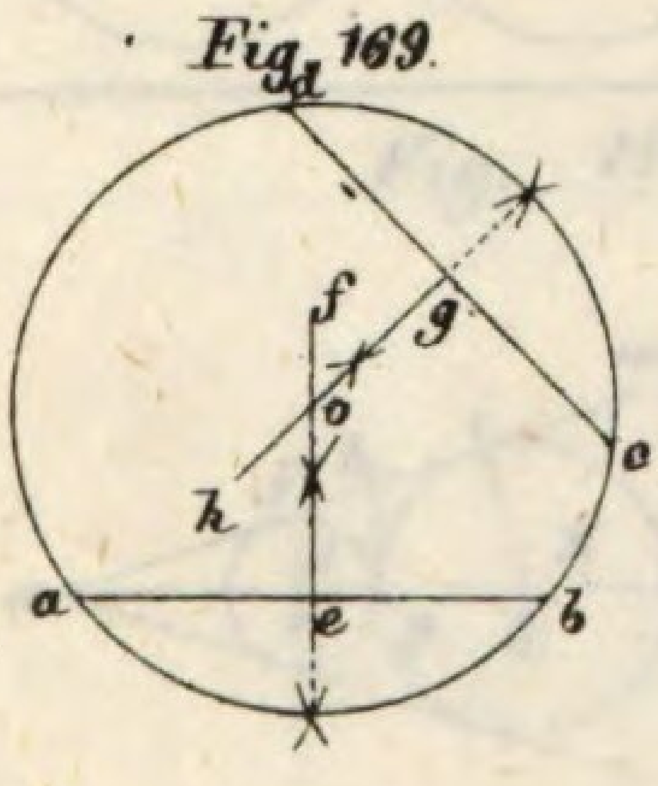


Fig. 170.

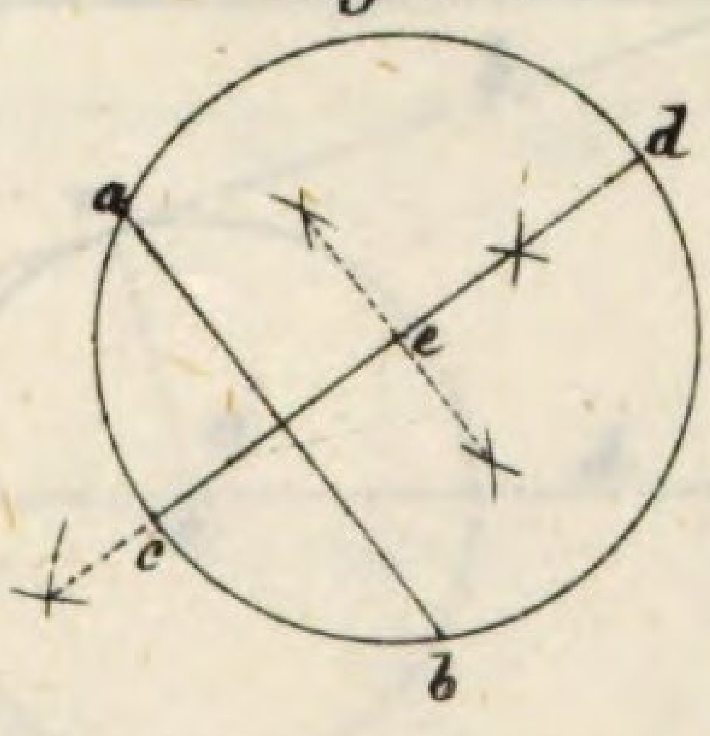


Fig. 171.

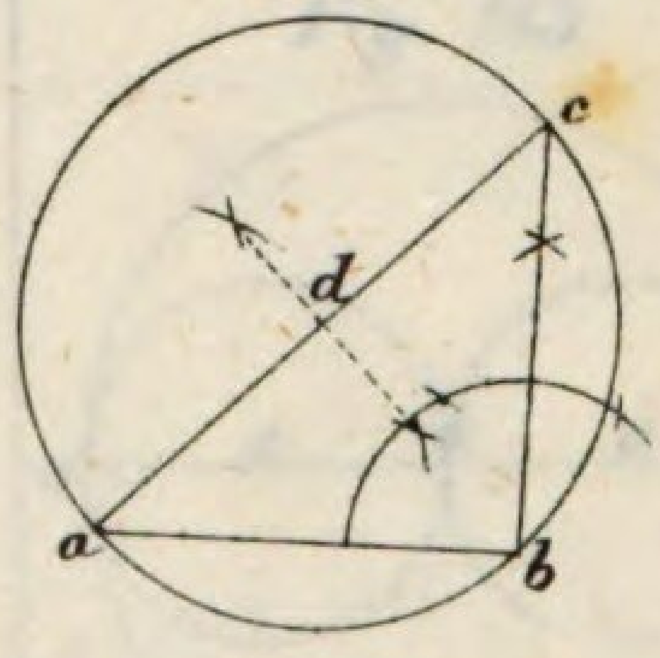


Fig. 172.

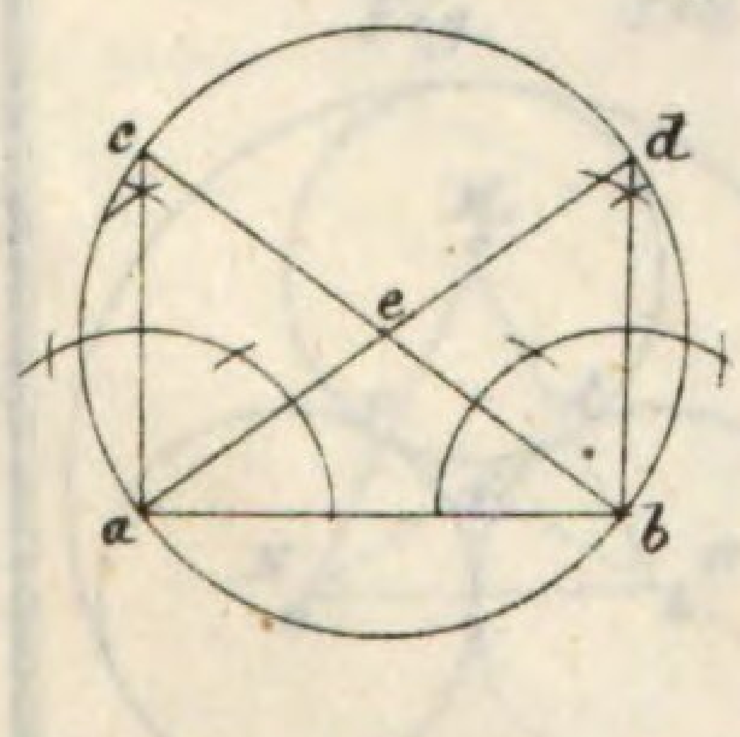


Fig. 173.

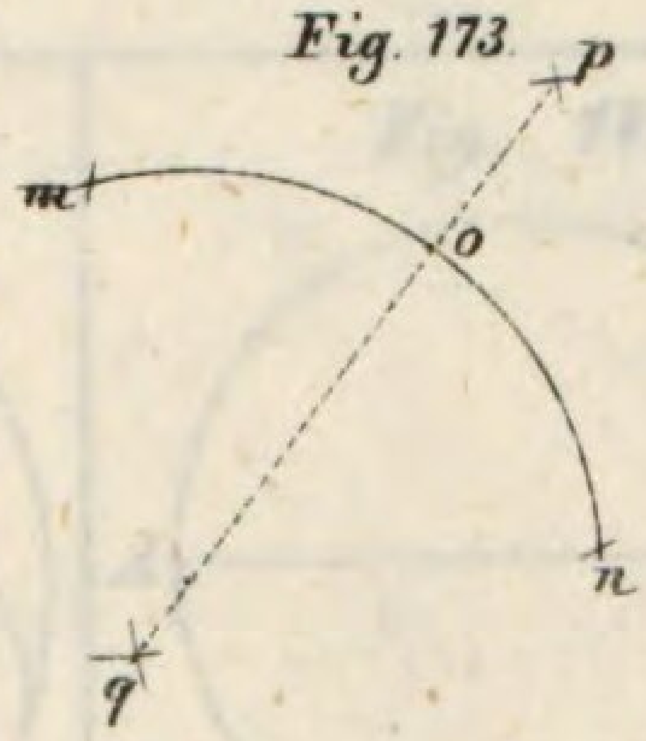


Fig. 174.

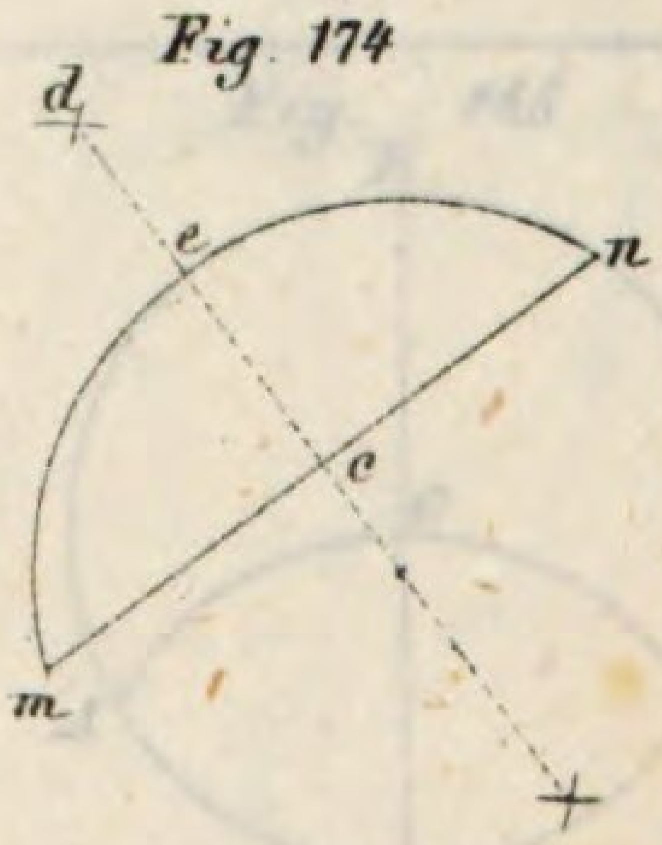


Fig. 175

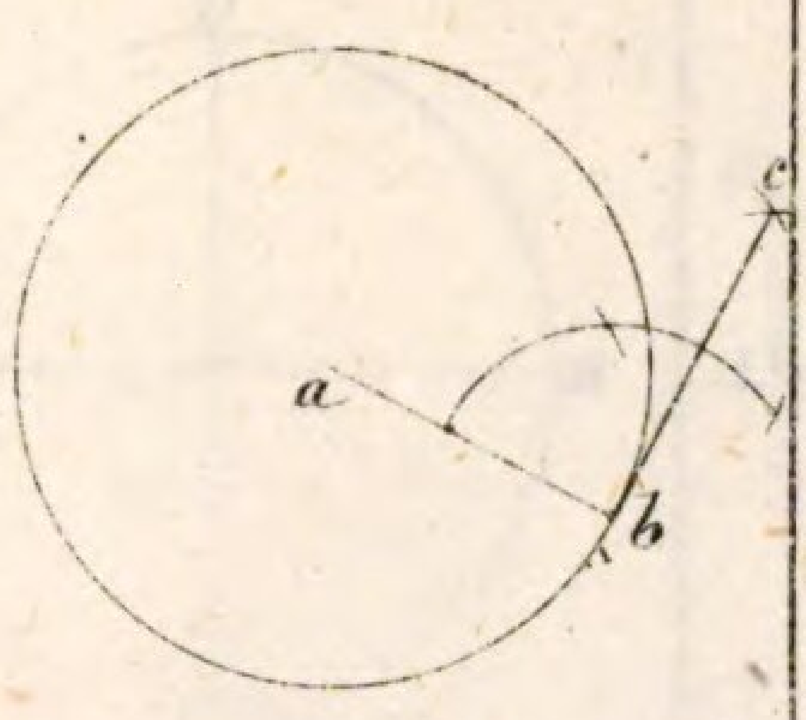


Fig. 176

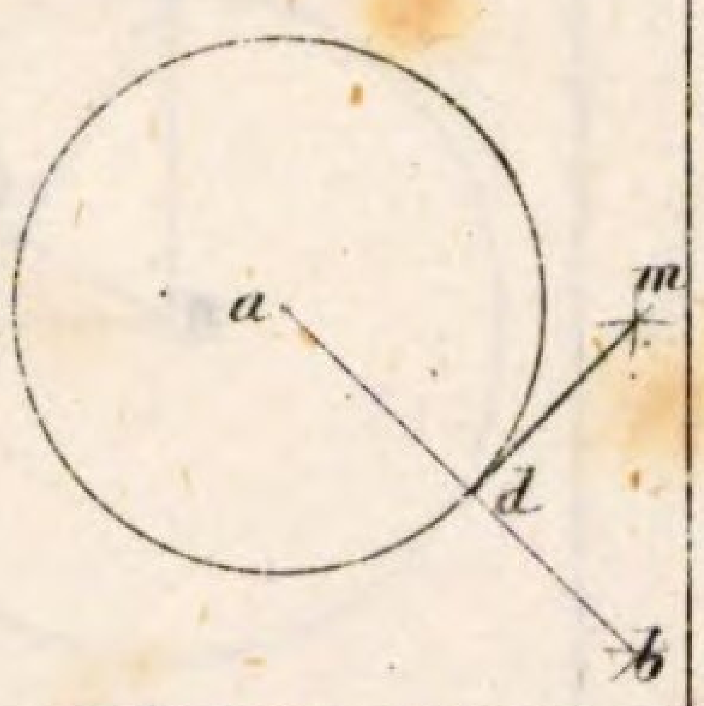


Fig. 177.

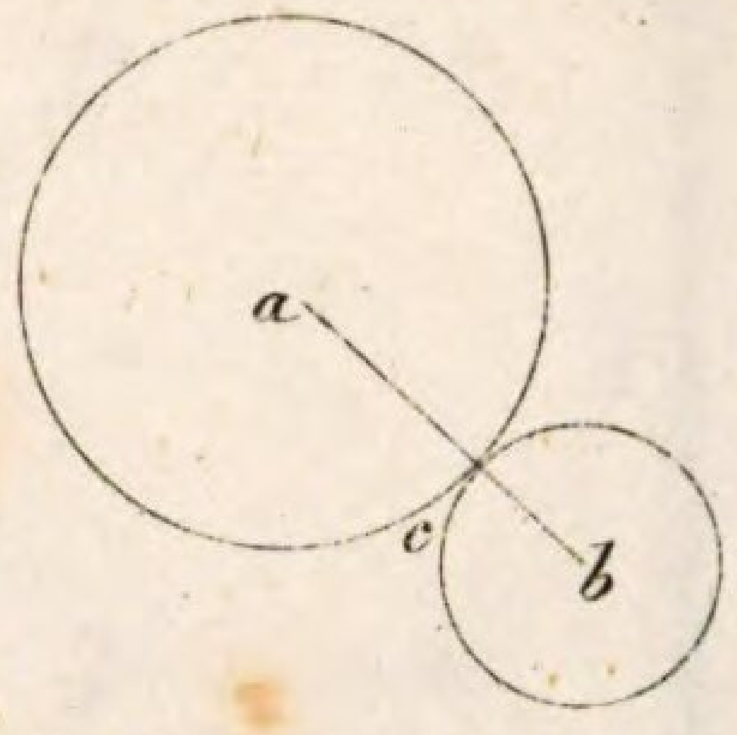


Fig. 178.

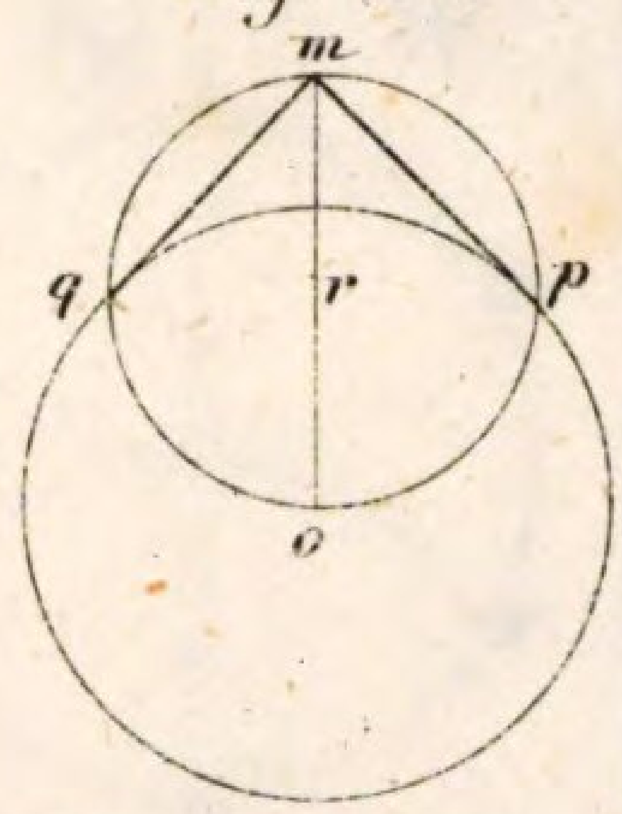


Fig. 179.

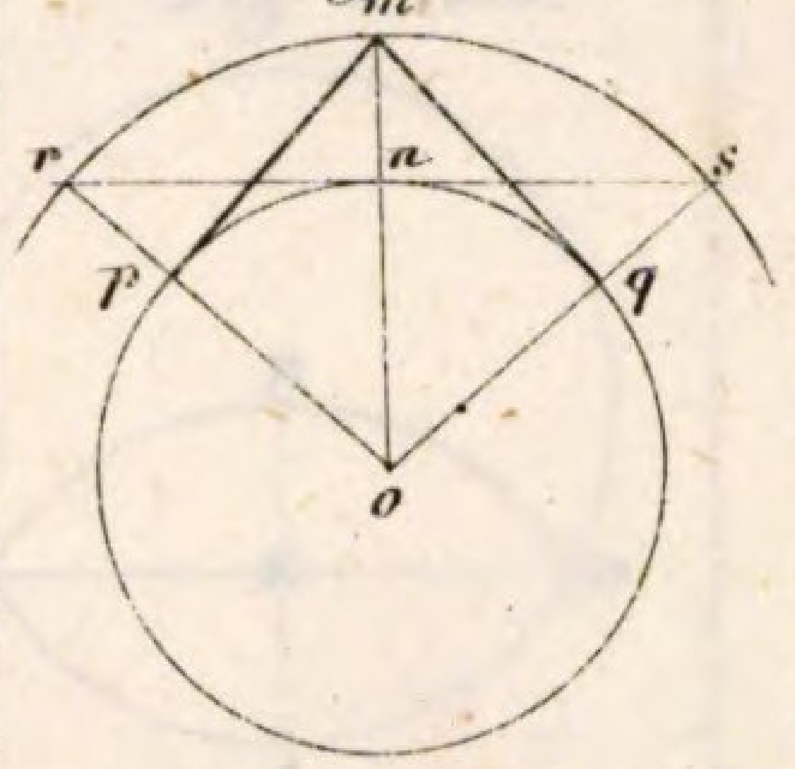


Fig. 180

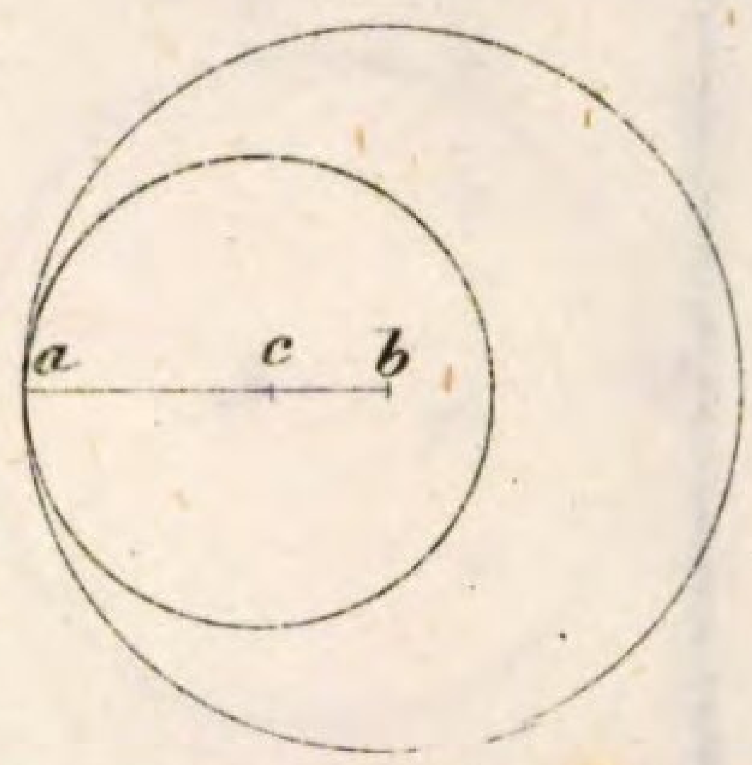


Fig. 181

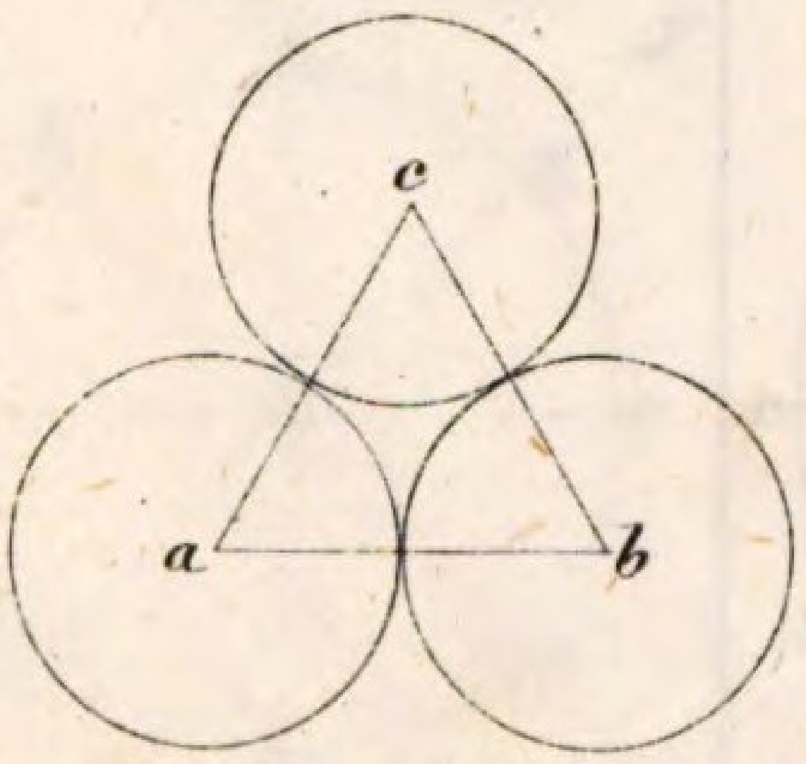


Fig. 182.

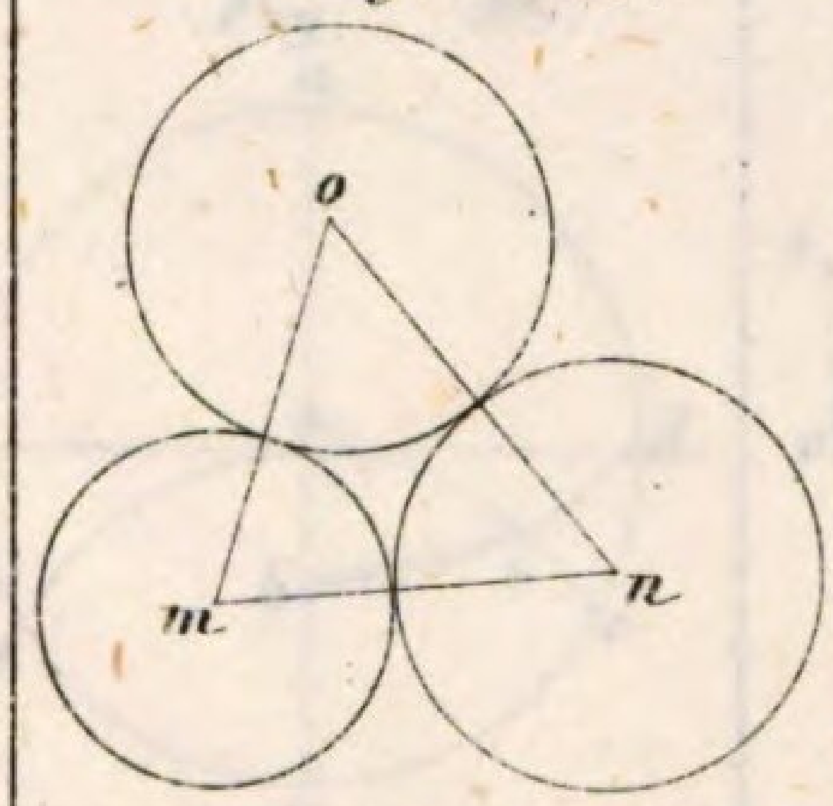


Fig. 183

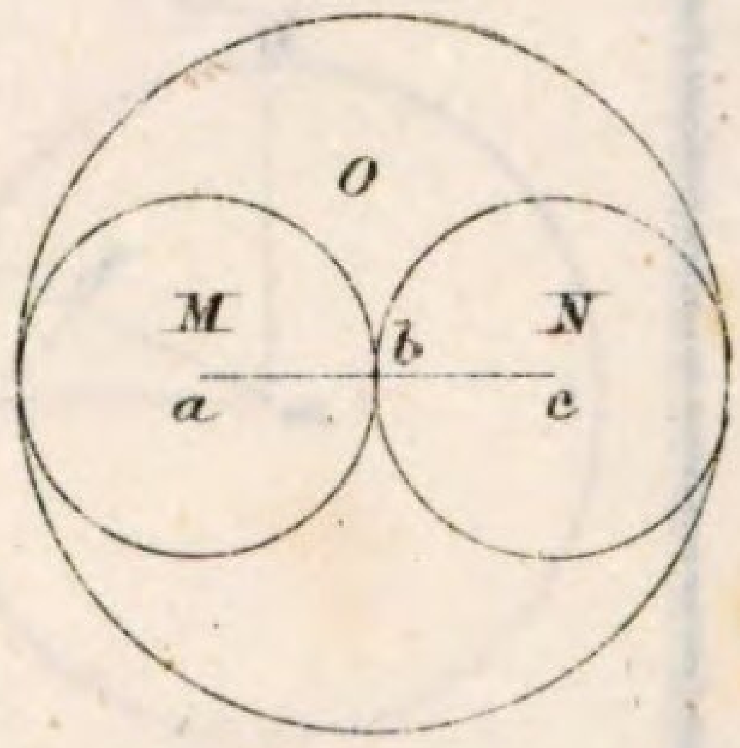


Fig. 184.

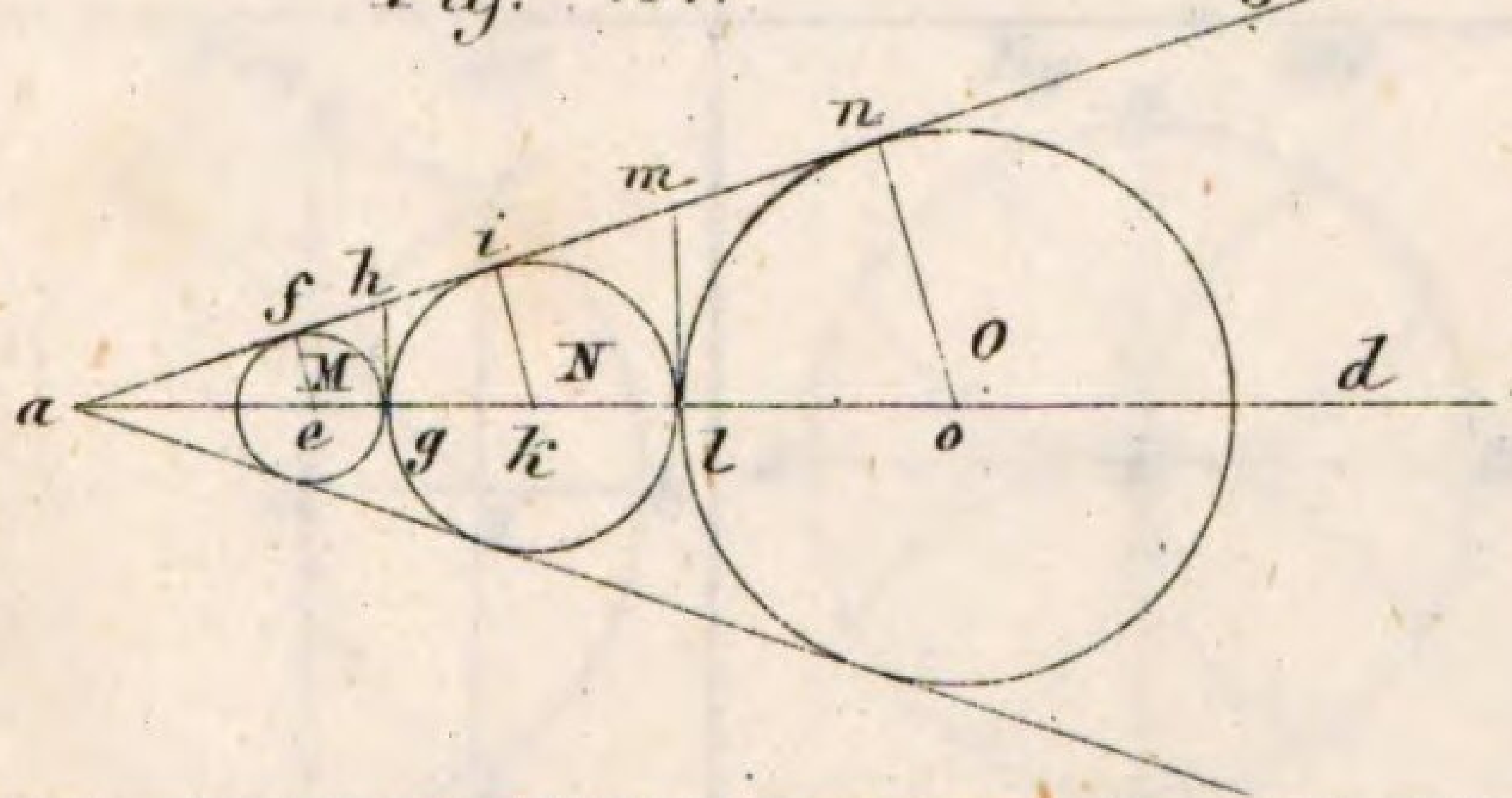


Fig. 185.

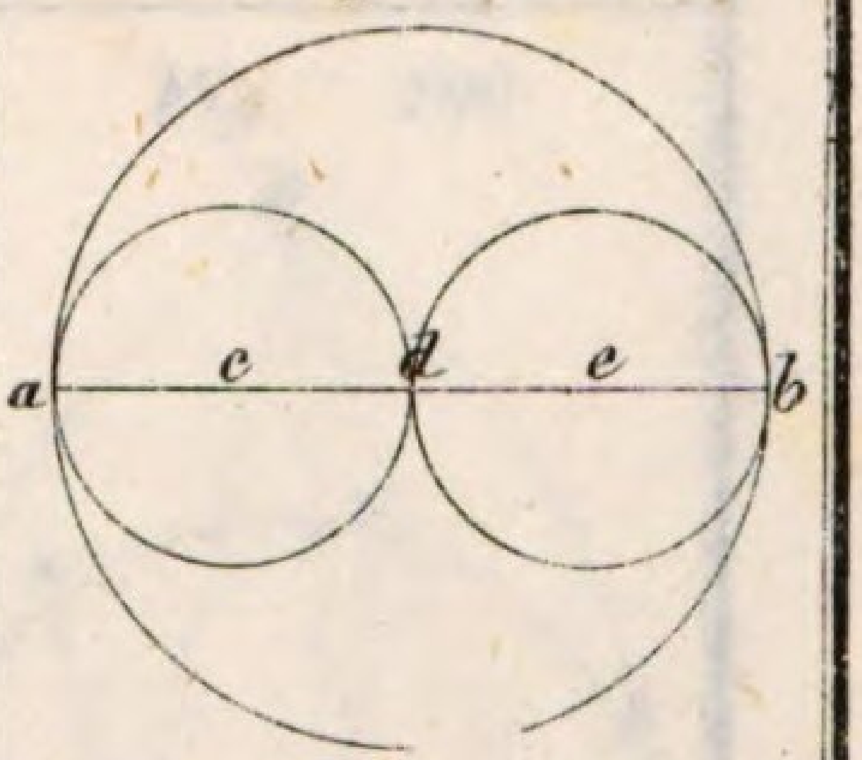


Fig. 186.

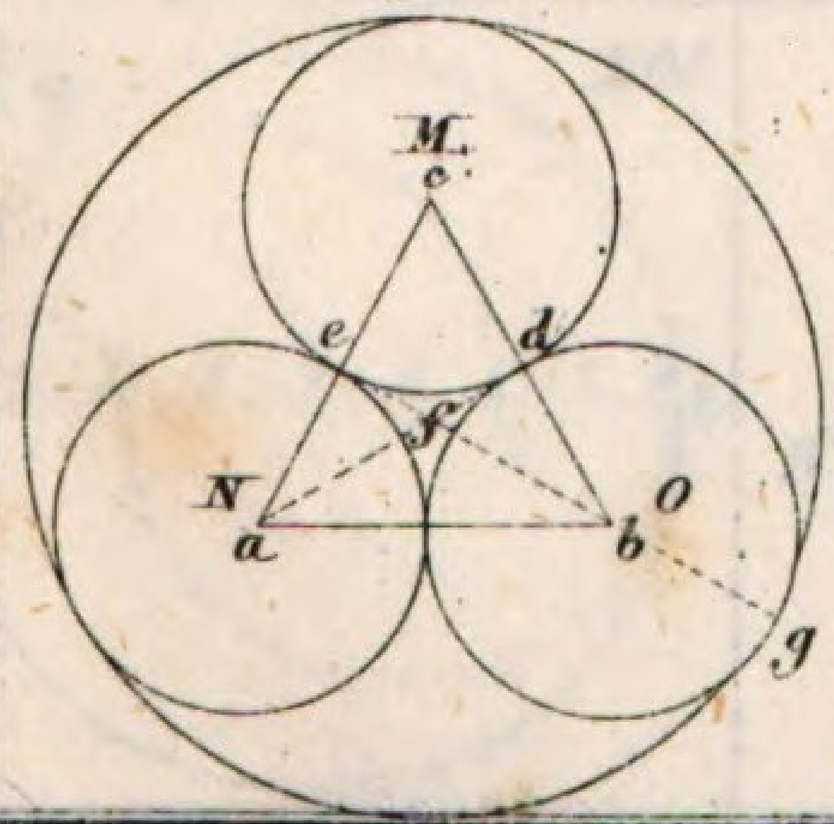


Fig. 187.

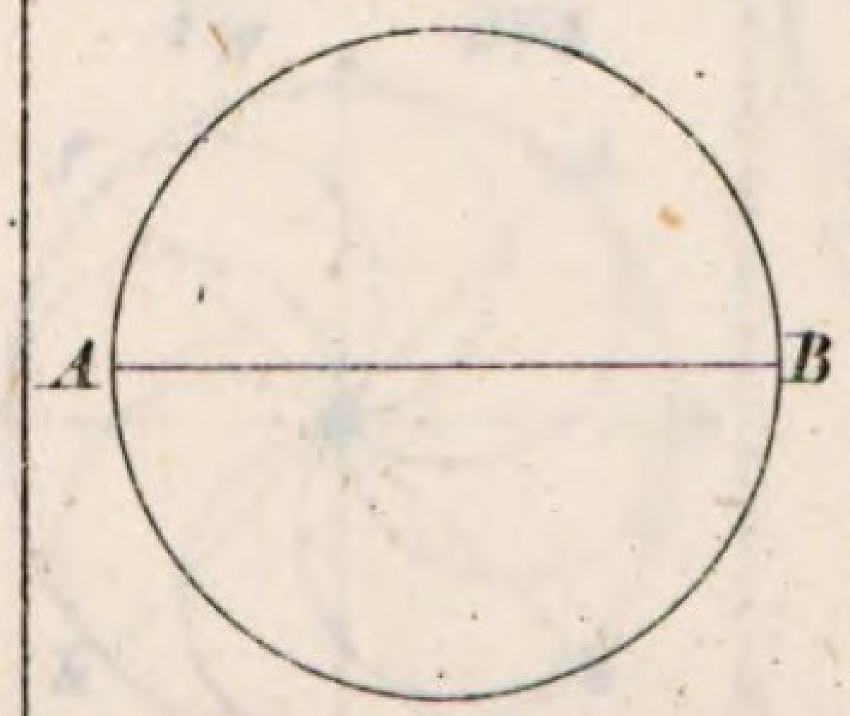
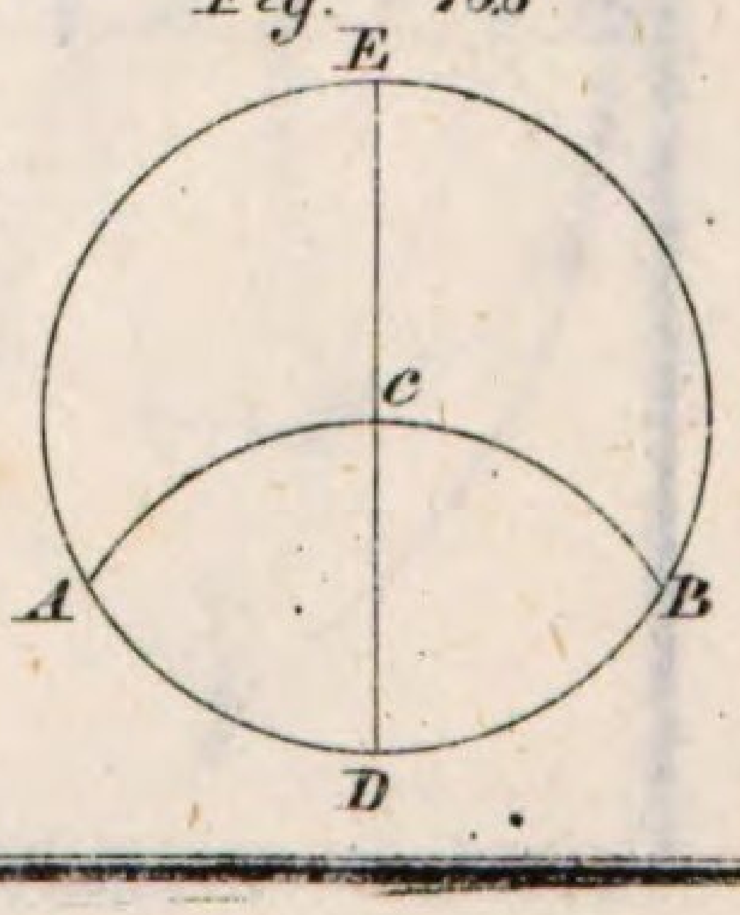
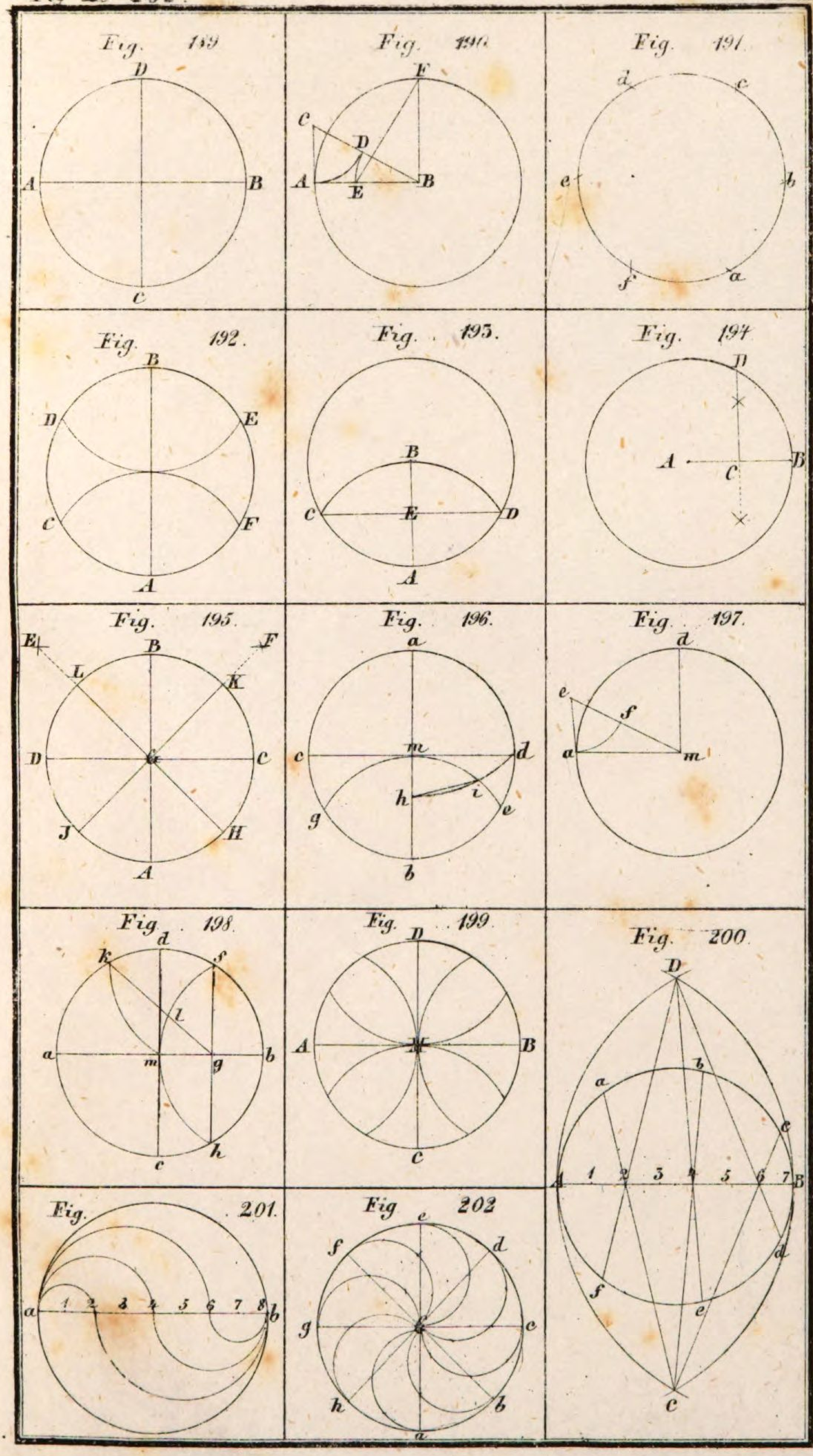


Fig. 188




Fig. 189
D
A B
C
Fig. 190
F
C
D
A B
E
Fig. 191
d c
e b
f a
Fig. 192.
B
D E
C F
A
Fig. 193.
B
C E D
A
Fig. 194
D
A B
C
Fig. 195.
E F
B
L K
D C
J H
A
Fig. 196.
a
c m d
h i
g e
b
Fig. 197.
d
e
f
a m
Fig 198.
d
k s
l
a m g b
c h
Fig. 199.
D
A B
C
Fig. 200
D
b
a
c
A 1 2 3 4 5 6 7 B
d
f
e
C
Fig. 201.
a 1 2 3 4 5 6 7 8 b
Fig 202
e
f d
g c
h b
a

Scharpf, C. W.

Die geneometrische Formenlehre in Verbindung mit dem geometr. Zeichnen

Ulm 1852